



Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica  
Departamento de Matemática Aplicada



---

# Estratégias para Controle de Pragas

## Sistemas P-fuzzy com Controle Híbrido

**Luiz Rafael dos Santos**

Mestrado em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

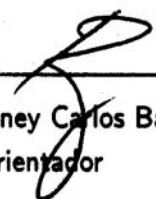
Campinas-SP  
Setembro de 2008

# Estratégias para Controle de Pragas

## Sistemas P-fuzzy com Controle Híbrido

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Luiz Rafael dos Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 07 outubro de 2008.



---

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi  
Orientador

**Banca examinadora:**

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFABC)

Prof. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice (FAMAT-UFU)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica (IMECC), UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática Aplicada**.

## FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8a / 5094

Santos, Luiz Rafael dos  
Sa59e Estratégias para controle de pragas: sistemas p-fuzzy com controle  
híbrido / Luiz Rafael dos Santos – Campinas, [S.P.: s.n.], 2008.

Orientador: Rodney Carlos Bassanezi.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Biomatemática. 2. Sistemas Difusos. 3. Pragas – Controle.  
I. Bassanezi, Rodney Carlos II. Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica III. Título

Título em Inglês: Strategies for pests control: P-fuzzy systems with hybrid control

Palavras-chave em inglês (Key-words): 1. Biomathematics. 2. Fuzzy systems. 3. Pests control.

Área de Concentração: Biomatemática.

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada.

Banca Examinadora: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (IMECC/UNICAMP)

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFABC)

Prof. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice (FAMAT-UFU)

Data da defesa: 01/09/2008

Programa de Pós-graduação: Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 01 de setembro de 2008 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**




---

**Prof.(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI**



---

**Prof. (a). Dr (a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO**



---

**Prof. (a). Dr (a). ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE**

*Para Marlise e Erico que me possibilitaram a viagem, como um presente.*

*Para Carolina, que comigo viaja, me ensinando a viajar.*

*“Não vos ensoberbais do que sabeis, porquanto esse saber tem limites muito estreitos no mundo em que habitais. Suponhamos sejais sumidades em inteligência neste planeta: nenhum direito tendes de envaidecer-vos. Se Deus, em seus desígnios, vos fez nascer num meio onde pudestes desenvolver a vossa inteligência, é que quer a utilizeis para o bem de todos; é uma missão que vos dá, pondo-vos nas mãos o instrumento com que podeis desenvolver, por vossa vez, as inteligências retardatárias e conduzi-las a ele.”*

Ferdinand, Espírito Protetor (Bordeaux, 1862)  
De “O Evangelho Segundo o Espiritismo”,  
cap. VII, it. 13, por Allan Kardec.

*“Cabe aqui citar novamente Pascal. ‘Só há dois tipos de homens: os justos que se crêem pecadores e os pecadores que se crêem justos.’ Mas nunca sabemos em qual dessas categoria nos classificamos — se soubéssemos, já estaríamos na outra!”*

André Comte-Sponville

De “O pequeno tratado das grandes virtudes”.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente Àquele que nos criou e inventou esta tão maravilhosa jornada chamada vida.

Agradeço aos meus pais, Marlise e Erico, que sempre me apoiaram e acalmaram suas saudades para que eu pudesse realizar meus sonhos. Meu saudoso pai não pôde ver aqui na Terra este sonho realizar-se, mas tenho plena certeza de que acompanhou, até de mais perto, me amparando e torcendo por mim. Obrigado por me darem um pouco da vida de vocês para que eu vivesse.

Não posso deixar de mencionar meus irmãos Gabriel, Lara e Luma que foram e continuam sendo grandes companheiros de jornada. Um agradecimento especial à Goretti e a Regi por também fazerem parte da família. Agradecimentos também à Vivi e à Preta que nas minhas chegadas eram sempre as primeiras a me receber.

Agradeço especialmente à Carolina por tudo que já compartilhamos; por me auxiliar a passar pelos 2 anos de viagens e de distância; por me amar cada vez mais; e por me incentivar a ser uma pessoa melhor. Te amo muito. Também a família Bergmann por me receber como um filho em seu lar.

Agradeço aos amigos e colegas que fiz em Campinas, ao pessoal da Unicamp, da Pensão dos Ratões e do Educandário Eurípedes, que fizeram minha vida longe de casa mais amena e muito mais alegre. Em particular agradeço os amigos Roy, Olivâine e Ilton pelas risadas compartilhadas durante o tempo de convivência na Pensão.

Ao meu orientador Rodney pela amizade permitida, pelos ensinamentos ministrados e pela oportunidade do crescimento profissional e pessoal, agradeço profundamente.

Também agradeço a todos os professores do IMECC que contribuíram para que este trabalho se realizasse. Em especial obrigado à Cidinha, à Tânia que sempre atenderam minhas necessidades, mesmo quando eu já estava em Blumenau.

Por fim agradeço a todos que de uma maneira ou de outra me auxiliaram para tornar esta realização uma realidade e que não nomeiei aqui. Sou eternamente devedor a todos, os daqui e os de mais além, que fizeram minha jornada na Terra mais florida e alegre.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é propor um modelo utilizando Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) que possa controlar, do ponto de vista teórico, uma determinada espécie, considerada como praga em uma lavoura ou plantação. Faz-se primeiro uma introdução à Teoria dos Conjuntos Fuzzy, bem como aos sistemas especialistas fuzzy que utilizam regras de inferência, através do método de inferência de Mamdani e que utilizem o método de defuzzificação por centro de massa. Logo após, são abordados os conceitos de Sistemas Dinâmicos P-Fuzzy uni e bidimensionais desenvolvidos por Silva [24] e Cecconelo [7]. É proposto um novo tipo de Sistema Dinâmico P-fuzzy para modelar a dinâmica populacional, de uma espécie ou de um sistema presa-predador, que leve em conta fatores extrínsecos da(s) espécie(s) envolvida(s). Estes fatores são representados por uma *Condição Ambiental*, que é definida e acoplada aos Sistemas P-fuzzy usuais. Ainda, usando um controlador fuzzy propomos um sistema de controle híbrido com controladores biológicos e químicos (biocidas) em que as espécies que interagem estão sujeitas também às condições ambientais. Simulações e experimentos computacionais feitos com o auxílio da *Fuzzy Logic Toolbox* do software *Matlab* são realizados e seus resultados são comentados.



# Abstract

The aim of this work is to propose determined model, using Fuzzy Rule-based Systems (FRBS), wich can control, in a theoretical manner, a species considered a plage in a farming or plantation. An introduction to Fuzzy Sets is maded as well as maded to Fuzzy Systems wich uses inference rules, through the Mamdani method of inference and that uses Centroid as defuzzification method. After this, the concepts of uni and bidimensional P-fuzzy Dynamic Systems are studied and approached, as developed by Silva [24] and Cecconelo [7]. We propose a new type of P-fuzzy Dynamic System, to model the population dynamics of one species system or of a prey-predator system, that takes into account extrinsic factors of the species involved. Such factores are represented by an *Enviromental Condition* wich is defined and connected to the usual P-fuzzy Systems. Finnaly, using a Fuzzy Controller, we propose a system for hybrid control with biological and chemical (biocides) controllers in wich the density of species are also influenced by enviromental conditions. Computational simulations and experiments are made with the aid of Matlab *Fuzzy Logic Toolbox* and its results are commented.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceitos Básicos de Teoria Fuzzy</b>	<b>3</b>
1.1. Introdução . . . . .	3
1.2. Conjuntos Fuzzy . . . . .	4
1.3. Números Fuzzy . . . . .	7
1.4. Lógica Fuzzy . . . . .	9
1.4.1. Variáveis Lingüísticas e Proposições Fuzzzy . . . . .	10
1.4.2. Conectivos Lógicos . . . . .	11
1.4.3. Relações e Produto Cartesiano Fuzzy . . . . .	12
1.5. Sistema Baseado em Regras Fuzzy . . . . .	13
1.5.1. Fuzzificação . . . . .	14
1.5.2. Módulo da base de regras . . . . .	15
1.5.3. Módulo de inferência fuzzy . . . . .	16
1.5.4. Módulo de Defuzzificação . . . . .	17
1.6. Conclusão . . . . .	18
<b>2. Sistemas P-Fuzzy</b>	<b>21</b>
2.1. Introdução . . . . .	21
2.2. Sistemas Dinâmicos P-fuzzy . . . . .	22
2.3. Sistemas P-fuzzy Unidimensionais . . . . .	23
2.3.1. Equilíbrio e Estabilidade de Soluções . . . . .	23
2.3.2. Crescimento Malthusiano . . . . .	26
2.3.3. Crescimento Inibido do tipo Logístico . . . . .	27
2.4. Sistemas P-fuzzy Bidimensionais . . . . .	30
2.4.1. Estabilidade e Equilíbrio de Soluções . . . . .	31
2.4.2. Modelo de Kolmogorov . . . . .	33
2.4.3. Construindo a Base de Regras para Presa-Predador . . . . .	35
2.5. Conclusões . . . . .	40
<b>3. Dinâmica Populacional Fuzzy com Condição Ambiental</b>	<b>43</b>

3.1. Motivação . . . . .	43
3.2. Modelo Unidimensional . . . . .	44
3.2.1. Modelagem . . . . .	44
3.2.2. Contruindo a Base de Regras . . . . .	47
3.2.3. Experimentos Numéricos . . . . .	49
3.2.4. Considerações sobre o Modelo Unidimensional . . . . .	54
3.3. Modelo Bidimensional . . . . .	55
3.3.1. Modelagem . . . . .	55
3.3.2. Contruindo a Base de Regras . . . . .	58
3.3.3. Experimentos Numéricos . . . . .	60
3.4. Conclusão . . . . .	66
<b>4. Controle de Pragas utilizando um SBRF</b>	<b>69</b>
4.1. Motivação . . . . .	69
4.2. Modelo Unidimensional . . . . .	70
4.2.1. Modelagem . . . . .	71
4.2.2. Experimentos Numéricos . . . . .	74
4.3. Modelo Bidimensional Híbrido: Químico e Biológico . . . . .	83
4.3.1. Modelagem . . . . .	83
4.3.2. Experimentos Numéricos . . . . .	85
4.4. Conclusão . . . . .	94
<b>5. Considerações Finais</b>	<b>97</b>
5.1. Trabalhos Futuros . . . . .	98
5.1.1. Análise de Equilíbrios do Sistema P-fuzzy com Condição Ambiental . . . . .	98
5.1.2. Aplicação do Modelo de Condição Ambiental . . . . .	98
5.1.3. Controle Ótimo Fuzzy . . . . .	98
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>99</b>
<b>A. Programas computacionais</b>	<b>101</b>
A.1. Códigos-fonte para Sistema P-fuzzy . . . . .	101
A.1.1. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy 1D . . . . .	101
A.1.2. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy 2D . . . . .	102
A.2. Códigos-fonte para Sistema P-fuzzy com Condição Ambiental . . . . .	104
A.2.1. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy 1D com $\kappa$ . . . . .	104
A.2.2. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy 2D com $\kappa$ . . . . .	105
A.3. Códigos-fonte para Sistema P-fuzzy Controlado . . . . .	107
A.3.1. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy 1D controlado . . . . .	107

---

A.3.2. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy $2D$ controlado . . . . .	108
A.3.3. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy $1D$ controlado com $\kappa$ . . . . .	111
A.3.4. Código-fonte em Matlab para Sistema P-Fuzzy $2D$ controlado com $\kappa$ . . . . .	113
<b>B. Bases de Regras para Sistema P-fuzzy <math>2D</math> com <math>\kappa</math></b>	<b>117</b>
B.1. Base de Regras com Condição Ambiental a partir Quadro 5 . . . . .	117
B.2. Base de Regras com Condição Ambiental a partir do Quadro 6 . . . . .	119

# Introdução

As tentativas de modelar a dispersão populacional de uma espécie, com o intuito de compreender sua dinâmica remontam o século XIX. Os modelos pioneiros (Malthus, Verhulst, Lotka-Volterra) entre outros utilizam-se de equações diferenciais determinísticas para predizer os estados das variações populacionais desta espécie. Dada a complexidade dos fenômenos observados, nem sempre é possível bem descrevê-lo apenas com o uso destas equações, principalmente por que devemos estimar bem os parâmetros para que as soluções realmente façam sentido.

Por outro lado, Lofti Zadeh [28] publicou em 1965 seu famoso artigo que trazia uma nova teoria de conjuntos a *Teoria de Conjuntos Fuzzy*. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy, ou Lógica Fuzzy trabalha com a noção de que em muitas situações a pertinência de um elemento a um conjunto deve ser estendida.

Esta extensão vai de encontro com o sentido usual da palavra “pertencer”, sentido este da lógica binária que nos traz o *Princípio do terceiro excluído* que diz que um elemento “ou pertence a um conjunto, ou não pertence a ele, nunca ocorrendo outro caso” [8]. Isso significa que agora teremos um elemento que terá um grau de pertinência ao conjunto considerado.

Aplicações da Lógica Fuzzy tem surgido desde então em todas as áreas das ciências aplicadas. Em particular, Peixoto [22], Silva [24] e Cecconelo [7] utilizaram um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) para modelar a densidade populacional de uma espécie utilizando regras de inferência do tipo “**Se ... então ...**”. Estes sistemas são chamados *Sistemas Puramente Fuzzy* (doravante P-fuzzy), por não utilizarem nenhum método clássico — poderíamos dizer determinístico — para encontrar os estados das variações destas populações. Neste sentido, um dos objetivos deste trabalho é apresentar os Sistemas Dinâmicos P-fuzzy unidimensionais e bidimensionais.

Além disso, uma outra aplicação da lógica fuzzy, principalmente dos SBRF, é o controle de sistemas dinâmicos ou não. O controle de máquinas, a implementação de sistemas inteligentes entre outras aplicações têm sido resolvidas através de sistemas fuzzy [2].

Com o crescimento do Agronegócio, a necessidade de controlar pragas em lavouras está em constante aumento, haja vista os prejuízos que determinadas doenças tem causado à todo tipo de plantações. Quando a doença é transmitida por algum vetor, principalmente quando inseto, a larga utilização de produtos químicos é usada sem nenhum tipo de programa de coordenação [6]. O uso de predadores naturais ainda não está tão disseminado, porém várias pesquisas têm sido feitas neste sentido [17].

Assim, dada a capacidade dos SBRF de controlar sistemas, este trabalho objetiva apresentar

um modelo teórico que controle uma população de uma praga, usando um sistema híbrido que leve em conta o controle químico e o predador natural da espécie que se quer controlar.

Um outro objetivo deste trabalho é apresentar um Sistema Dinâmico P-fuzzy que leve em conta fatores extrínsecos da população que se quer modelar. Na prática estes fatores estão reunidos em uma variável chamada *Condição Ambiental*, que irá representar estes estados do ambiente. Consideraremos estes fatores como sendo periódicos, e desta forma, o Sistema P-fuzzy proposto será não-autônomo num certo sentido, pois implicitamente dependerá do tempo. Estas condições representam como o ambiente afeta a variação de uma determinada população.

Para alcançar estes objetivos, o trabalho foi organizado da seguinte forma:

**Capítulo 1:** Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos da lógica fuzzy bem como dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, apresentando o Controlador de Mamdani. Este capítulo dará a base teórica para os capítulos subsequentes.

**Capítulo 2:** Mostramos neste capítulo os Sistemas Dinâmicos P-fuzzy uni e bidimensionais, apresentando também condições de existência e estabilidade de soluções dos mesmos.

**Capítulo 3:** A influência de uma Condição Ambiental é inserida nos sistemas p-fuzzy uni e bidimensionais apresentados no capítulo anterior, neste capítulo. São feitos experimentos numéricos que contemplam vários tipos de condições iniciais deste tipo de sistema.

**Capítulo 4:** Este capítulo têm o objetivo de apresentar um SBRF que controle os sistemas p-fuzzy mostrados nos capítulos anteriores. Novamente são feitas simulações numéricas para mostrar a robustez do sistema e sua capacidade de controlar uma determinada praga.

Por fim são feitas as considerações finais e conclusões sobre o trabalho, bem como são apresentados trabalhos futuros relacionados e pretendidos.

Também são anexados ao trabalho os programas computacionais utilizados para a realização das simulações.

# Capítulo 1.

## Conceitos Básicos de Teoria Fuzzy

### 1.1. Introdução

Quando é necessário tomar uma decisão no mundo real, o ambiente no qual se deseja arbitrar, os objetivos a serem alcançados, as restrições ou as consequências das possíveis ações nem sempre são precisas. Normalmente tem-se utilizado a probabilidade para lidar com tais imprecisões. No entanto em muitos casos a imprecisão não é resultado da aleatoriedade do fenômeno a ser estudado, mas sim pertencente a própria natureza do mesmo [4].

Por exemplo, vamos supor que queremos classificar pessoas de um conjunto como sendo jovem ou idoso e estabelecemos que um indivíduo será considerado idoso quando tiver idade igual ou superior à 60 anos. Nossa classificação estaria correta quando, por conta de nossa “nota de corte” dissermos que alguém que tenha 59 é jovem?

Este tipo de situação também ocorre com todo tipo de classificação que utiliza adjetivos como largo, pequeno, importante, sério, aproximado, etc. Notamos também aqui que estes adjetivos não são “eventos aleatórios”, mas sim são inerentes a especificidade do fenômeno a ser classificado.

Assim, em contraste com a noção de classes ou conjuntos em matemática – binária, em nosso dia a dia a pertinência ou não de um elemento a um conjunto não é decidida, precisa ou *crisp*. Nem tudo o que vemos é preto ou branco. Há muitos casos de gradações de cinza, entre os opostos preto e branco (Veja [16]).

No intuito de se lidar formalmente com estas imprecisões de pertinência ou gradações é que

foram empreendidos esforços que resultaram na criação de uma teoria de conjuntos apropriada. Esta teoria foi chamada de *Teoria dos Conjuntos Fuzzy*, ou *Lógica Fuzzy*, que tem crescido consideravelmente em nossos dias, tanto do ponto de vista teórico como de aplicações em diversas áreas do conhecimento, sobretudo em tecnologia.

A palavra inglesa *fuzzy* tem o significado de incerto, vago, impreciso, subjetivo, nebuloso, difuso, etc. Porém, nenhuma dessas traduções é tão fiel ao sentido amplo dado pela palavra *fuzzy* em inglês. Esta teoria teve suas bases formalizadas por L. A. Zadeh [28] no seu famoso artigo de 1965.

## 1.2. Conjuntos Fuzzy

Podemos dizer que um conjunto fuzzy é uma classe de objetos cujas fronteira entre aqueles que pertencem ao conjunto e aqueles que não pertencem não é conhecida ou o é, parcialmente.

Para obter a formalização matemática deste tipo de conjunto, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser bem descrito através de uma função chamada *função característica*  $\chi : X \longrightarrow \{0; 1\}$ , tal que sendo  $A$  um subconjunto de um universo  $X$ , para todo  $x \in X$  vale

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, por exemplo, se tomarmos o conjunto dos números pares, teremos que a função característica de  $\mathbb{P}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é dada por:

$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ for divisível por } 2. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto,  $\chi_{\mathbb{P}}(4) = 1$  e  $\chi_{\mathbb{P}}(11) = 0$ .

Isto posto, propõe-se que a noção de subconjunto fuzzy é dada ampliando-se o contra-domínio de  $\chi$  para o intervalo  $[0; 1]$ . Assim um elemento  $x \in X$  terá um grau de pertinência ao conjunto  $A$



em questão. Formalmente esta afirmação pode ser bem caracterizada pela seguinte definição.

**Definição 1.1** (Subconjunto Fuzzy). *Um subconjunto fuzzy  $F$  de um conjunto clássico  $X$  é caracterizado por uma função  $\mu_F : U \longrightarrow [0, 1]$ , chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ .*

A definição 1.1 acima estabelece basicamente que um subconjunto fuzzy  $F \subset X$ , independentemente da imprecisão de suas fronteiras, pode ser completamente definido bastando associar a cada elemento  $x \in X$  um valor entre 0 e 1, o qual representa o grau de pertinência de  $x$  ao subconjunto  $F$ .

Além disso, segundo esta definição, cada subconjunto clássico de  $X$  é um subconjunto fuzzy em  $X$ , onde a função de pertinência é a função característica do subconjunto, isto é, os Conjuntos Clássicos são casos particulares de Conjunto Fuzzy. Mais ainda,  $\mu_F(x) = 1$  e  $\mu_F(x) = 0$  indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência total do elemento  $x$  em  $F$ .

**Definição 1.2** (Subconjunto Fuzzy Normal). *Dizemos que um subconjunto fuzzy  $F \subset X$  é normal se existe  $x \in X$  tal que  $\mu_A(x) = 1$ .*

**Exemplo 1.3.** *Suponha que queiramos então descrever com conjuntos fuzzy a densidade populacional de determinada praga em uma plantação, de forma a classificá-la como sendo alta. Poderíamos ter um subconjunto fuzzy da densidade populacional de pragas em uma determinada lavoura descrito pela seguinte função de pertinência*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 10, \\ \frac{x-10}{70} & \text{se } 10 < x \leq 80, \\ 1 & \text{se } 80 < x < 100. \end{cases} ,$$

donde podemos concluir que uma lavoura que tenha 50% de suas folhagens infectadas terá  $\mu_A(50) = 0.57$ , o que significa que ela será considerada uma contaminação alta com grau de pertinência 0.57. O conjunto  $A$  é normal, dado que infestações com mais de 80% são consideradas alta com grau de pertinência 1, conforme Figura 1.1.

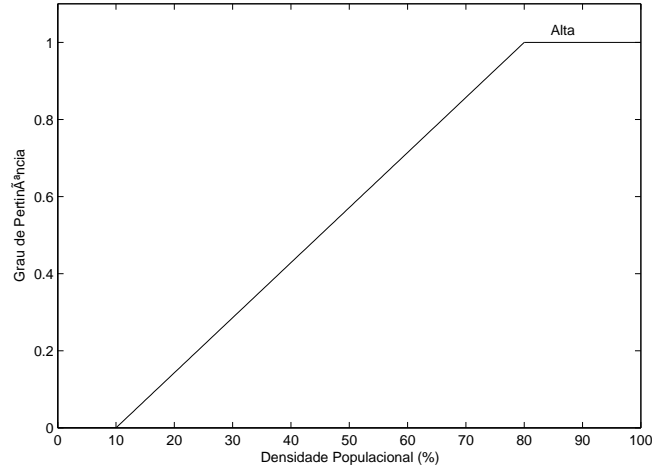


Figura 1.1.: Subconjunto fuzzy de densidade de infestação em uma plantação.

A seguir vamos estender as principais operações sobre conjuntos clássicos para conjuntos fuzzy. Para isso sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de  $X$ .

**Definição 1.4 (União).** A *união* entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $X$  cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \sup_{x \in X} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

**Definição 1.5 (Intersecção).** A *intersecção* entre  $A$  e  $B$  é o subconjunto fuzzy de  $X$  cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \inf_{x \in X} \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

**Definição 1.6 (Complementar de subconjuntos fuzzy).** O *complementar* de  $A$  é o subconjunto fuzzy  $A' \subset X$  cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in X.$$

Através da definição de Complementar, poderemos obter a partir do Exemplo 1.3, a função de pertinência do subconjunto com Densidade de Infestação Baixa, dada por

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 10, \\ \frac{80-x}{70} & \text{se } 10 < x \leq 80, \\ 0 & \text{se } x > 80. \end{cases}$$

Assim, uma infestação de 50% será considerada Alta com grau de pertinência 0.57 e Baixa com grau de pertinência 0.43.

**Definição 1.7** (Igualdade). *Os subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de  $X$  são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se  $\mu_A(x) = \mu_B(x)$  para todo  $x \in X$ .*

### 1.3. Números Fuzzy

Como nosso objetivo é modelar um problema concreto, escolheremos como nosso conjunto universo, ou domínio, o conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ). Estes conjuntos fuzzy serão chamados de números fuzzy. Para entendê-los formalmente precisamos de algumas definições.

**Definição 1.8** ( $\alpha$ -nível). *Seja  $F$  um subconjunto fuzzy de  $X$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . O  $\alpha$ -nível de  $F$  é o subconjunto clássico de  $X$  definido por*

$$[F]^\alpha = \{x \in X : \mu_F(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

**Definição 1.9** (Suporte). *Seja  $F$  um subconjunto fuzzy de  $X$ , o suporte de  $F$ , o qual se denota por  $\text{supp}(F)$ , é o subconjunto de  $X$  cujos elementos têm grau de pertinência não nulos em  $F$ , isto é,*

$$\text{supp}(F) = \{x \in X : \mu_F(x) > 0\}.$$

Usaremos a notação  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  para denotar a família de subconjuntos fuzzy de  $\mathbb{R}$ , no qual os  $\alpha$ -níveis são dados por:

$$[F]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_F(x) \geq \alpha\}, \text{ para todo } \alpha \in [0; 1] \text{ e}$$

$$[F]^0 = \overline{\text{supp } F}$$

são compactos e não vazios.

Agora podemos definir um número fuzzy.

**Definição 1.10** (Número fuzzy). *Um subconjunto fuzzy  $F \subset \mathbb{R}$  é chamado de número fuzzy se satisfaz às seguintes condições:*

- (i)  $F$  é um subconjunto fuzzy normal;
- (ii) Todos os  $\alpha$ -níveis de  $F$  são intervalos fechados de  $\mathbb{R}$ ;
- (iii) O suporte de  $F$ ,  $\text{supp } F = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$ , é limitado.

O conjunto fuzzy  $A$  definido pela função de pertinência em forma de triângulo

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{se } b \leq x < c, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

satisfaz as propriedades de um número fuzzy e é denominado *número fuzzy triangular*. Usaremos a notação  $A = [a/b/c]$  para representá-lo, em que  $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$  e  $\mu_A(b) = 1$ .

No mesmo sentido, o conjunto fuzzy  $B$ , cuja função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b, \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

também satisfaz as propriedades da Definição 1.10 e é chamado *número fuzzy trapezoidal*. Será comumente denotado por  $B = [a/b/c/d]$  em que  $\mu_B(a) = \mu_B(d) = 0$  e  $\mu_B(b) = \mu_B(c) = 1$ .

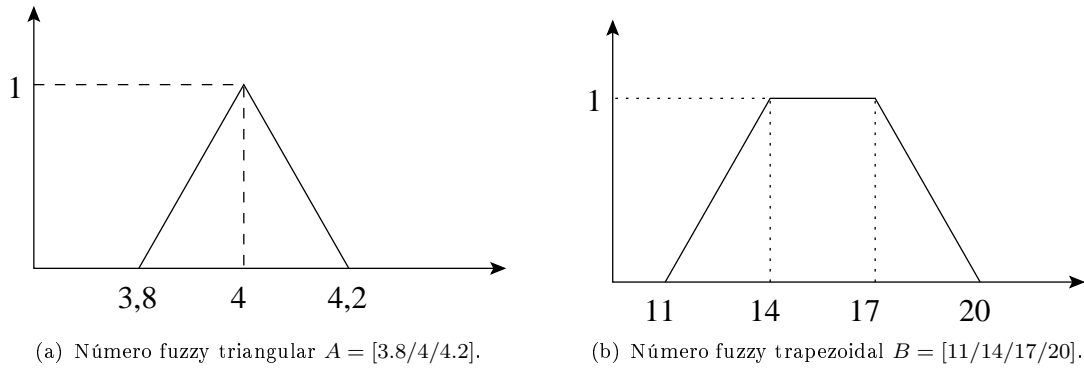


Figura 1.2.: Exemplos de número fuzzy.

**Exemplo 1.11.** *Em muitas oportunidades tem-se a necessidade de utilizar algum tipo de imprecisão no dia a dia. Quando se quer, por exemplo, marcar um encontro com outra pessoa, diz-se comumente, encontro-te “por volta das 4 horas. Por volta de 4 horas é um número fuzzy, que pode ser denotado por  $\hat{4}$  ou por sua função de pertinência  $\mu_4$ , a qual pode ser caracterizada pela seguinte equação*

$$\mu_4(x) = \begin{cases} \frac{x-3.8}{2} & \text{se } 3.8 < x \leq 4, \\ \frac{4.2-x}{2} & \text{se } 4 \leq x < 4.2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Note-se que o número fuzzy  $\hat{4}$  é um número simétrico (Vide Figura 1.2(a)) e poderia ser entendido como “em torno de 4”.*

## 1.4. Lógica Fuzzy

Um sistema lógico é um conjunto de axiomas e regras de inferência que visam representar formalmente um raciocínio válido. A lógica clássica trabalha com proposições que são ou verdadeiras ou falsas e se baseia na teoria clássica de conjuntos. Além disso, a lógica é um método de estudo que se propõe em procurar compreender a verdade.

Na lógica fuzzy, por sua vez, tendo como base a teoria de conjuntos fuzzy, uma proposição fuzzy do tipo “Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $B$ , então  $z$  é  $C$ ” é falsa ou verdadeira com um certo grau. Daí pode-se

inferir por verdades mesmo que se tenha que abrir mão de algum grau de certeza.

Em nossa tentativa de modelar os fenômenos que nos cercam existem situações nas quais a dicotomia verdadeiro falso não é suficiente para representá-los. Nestes casos, a lógica fuzzy é útil, pois é capaz de traduzir em termos matemáticos as informações contidas em frases expressas em linguagem natural, cheia de imprecisões.

Nesse sentido, construir uma maneira de fazer inferências e tomar decisões mesmo em ambientes imprecisos é altamente necessário.

### 1.4.1. Variáveis Lingüísticas e Proposições Fuzzy

Uma variável lingüística  $X$  em um universo  $\mathbb{U}$  é aquela cujos valores são subconjuntos fuzzy, que correspondem por sua vez a termos lingüísticos. Podemos dizer que uma variável lingüística é um substantivo enquanto seus valores são adjetivos.

Por exemplo, “chuva” é uma variável lingüística que pode assumir os atributos (valores) Fraca, Média, Forte. (Figura 1.3)

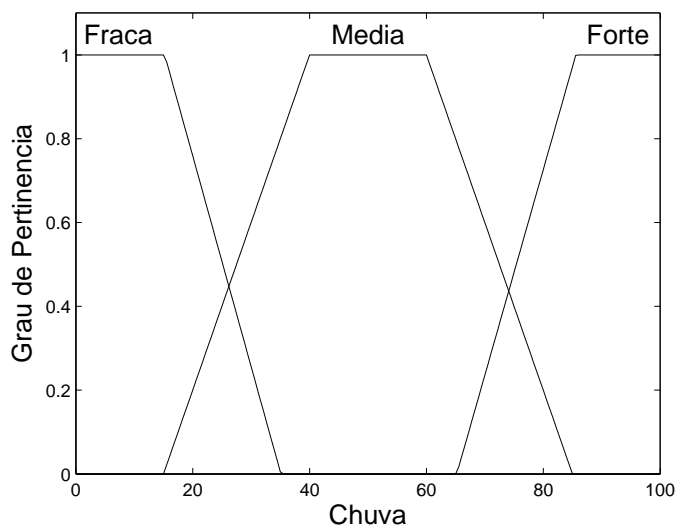


Figura 1.3.: Variável lingüística *intensidade de chuva* em mm de chuva.

Em nosso trabalho, por querermos modelar fenômenos biológicos em particular, os valores assumidos pelas variáveis serão números fuzzy, nos quais o universo de discurso será o conjunto dos números reais ( $\mathbb{R}$ ). Neste caso teremos uma variável lingüística real.

As sentenças em que aparecem variáveis lingüísticas juntamente com seus valores subjetivos são chamadas *proposição fuzzy*. Elas são do tipo:

Se “*ESTADO*”, então “*AÇÃ*”

### 1.4.2. Conectivos Lógicos

Para se traduzir matematicamente uma proposições fuzzy faz-se necessário definir convenientemente os conectivos “*E*” e “*OU*”, já que um estado pode comportar mais de uma variável.

Para tanto utilizaremos os operadores t-norma e t-conorma, os quais denotamos respectivamente por  $\wedge$  e  $\vee$  e os definiremos a seguir.

É importante salientar que na teoria clássica de conjuntos, quando temos dois conjuntos  $A$  e  $B$  quaisquer, se dissermos que um elemento  $x$  está em  $A$  “*E*” está em  $B$ , a informação fornecida é a de que  $x$  está na intersecção de  $A$  e  $B$ .

De maneira análoga, associa-se intersecção de conjuntos fuzzy para modelar o conectivo fuzzy “*E*”. Vejamos

**Definição 1.12** (t-norma). *O operador binário  $\wedge : [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$  é uma t-norma, se satisfaz:*

- (i) *Comutatividade:*  $x \wedge y = y \wedge x$ ;
- (ii) *Associatividade:*  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ ;
- (iii) *Monotonicidade:* se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \wedge y \leq u \wedge v$ ;
- (iv) *Condições de Fronteira:*  $\wedge(1, x) = 1 \wedge x = x$  e  $\wedge(0, x) = 0 \wedge x = 0$ .

**Exemplo 1.13.** *São exemplos de t-norma [2]:*

- (i)  $x \wedge_1 y = \min\{x, y\}$ ;
- (ii)  $x \wedge_2 y = x \cdot y$ ;
- (iii)  $x \wedge_3 y = \max\{0, x + y - 1\}$ .

Do mesmo modo, o conectivo “OU”, ao ser utilizado do ponto de vista da lógica clássica, na sentença “ $x$  está em  $A$  ‘OU’  $x$  está em  $B$ ” significa que o elemento  $x$  está na união de  $A$  e  $B$ . Daí agir-se de modo análogo para se construir o conceito de  $t$ -conorma.

**Definição 1.14** ( $t$ -conorma). *O operador binário  $\vee : [0; 1] \times [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$  é uma  $t$ -conorma, se satisfaz:*

- (i) *Comutatividade:*  $x \vee y = y \vee x$ ;
- (ii) *Associatividade:*  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ ;
- (iii) *Monotonicidade:* se  $x \leq u$  e  $y \leq v$ , então  $x \vee y \leq u \vee v$ ;
- (iv) *Condições de Fronteira:*  $\vee(1, x) = 1 \vee x = x$  e  $\vee(0, x) = 0 \vee x = 0$ .

**Exemplo 1.15.** *São exemplos de  $t$ -conorma [2]:*

- (i)  $x \vee_1 y = \max\{x; y\}$ ;
- (ii)  $x \vee_2 y = \min\{1; x + y\}$ ;
- (iii)  $x \vee_3 y = x + y - xy$ .

A seguir veremos o conceito de relações e de produto cartesiano fuzzy. Estas idéias auxiliam a formalizar matematicamente a lógica fuzzy.

### 1.4.3. Relações e Produto Cartesiano Fuzzy

O conceito de relação em matemática é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Uma relação clássica indica se há ou não alguma associação entre dois objetos. Neste sentido, uma relação fuzzy, estende este conceito e além de indicar se há ou não tal associação, mostra também o grau desta relação.

O conceito matemático de relação fuzzy é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos clássicos, estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência.



**Definição 1.16.** Uma relação fuzzy  $\mathcal{R}$  sobre  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$  é qualquer subconjunto fuzzy de  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ . Assim, uma relação fuzzy  $\mathcal{R}$  é definida por uma função de pertinência  $\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1]$ .

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos,  $U_1 \times U_2$ , a relação é chamada de *fuzzy binária* sobre  $U_1 \times U_2$ .

A partir destes conceitos, poderemos definir o *produto cartesiano fuzzy*. Esta definição será de grande importância para a construção dos controladores fuzzy, base dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. Tecnicamente, esta operação é similar à intersecção de conjuntos fuzzy (Definição 1.5), com a diferença de que neste caso o conjunto universo não necessariamente é o mesmo. Formalmente temos a Definição 1.17 que segue.

**Definição 1.17.** O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , respectivamente, é a relação fuzzy  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde  $\wedge$  representa o mínimo.

## 1.5. Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Vamos utilizar agora os conceitos aqui vistos para construir um sistema que de alguma forma emule as ações e decisões humanas, porém com um caráter mais formal.

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) é um sistema que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy. Em nossos estudos utilizaremos um tipo especial de SBRF chamado *Controlador Fuzzy*. A particularidade dos controladores fuzzy é que cada saída representava a “ação” correspondente à “condição” ou entrada do SBRF. O que se tenta fazer é reproduzir um *Controlador Humano*, levando-se em conta que as ações humanas são em geral execução de tarefas que seguem uma sequência de ordens linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras.

Os controladores fuzzy comandam as tarefas por meio de termos da linguagem usual. Neste sentido verificamos que variáveis linguísticas desempenham papel fundamental. Estes termos, traduzi-

dos por conjuntos fuzzy, são utilizados para transcrever a base de conhecimentos através de uma coleção de regras fuzzy, denominada **base de regras fuzzy**.

A partir dessa base de regras obtém-se a *relação fuzzy*, a qual produzirá a saída (resposta, ação) para cada entrada (estado, condição). Por exemplo, “Se estiver  *muito frio*, então coloque  *muita roupa*”.

Um controlador fuzzy é composto de basicamente quatro módulos: o *fuzzificador*, a *base de regras*, o *método de inferência* e o *defuzzificador*. O esquema do controlador pode ser visto na Figura 1.4. A estrutura dos controladores fuzzy permite a transformação do domínio de nossos fenômenos (comumente os números reais) para o domínio dos conjuntos fuzzy, através dos números fuzzy. A partir de então é utilizado um método de inferência fuzzy nas regras pré-estabelecidas para que seja tomada uma decisão. Por fim se faz a transformação inversa para o mundo real da decisão escolhida. Vamos analisar cada módulo em particular.

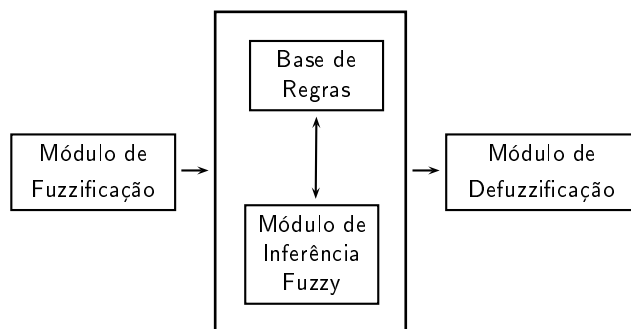


Figura 1.4.: Esquema geral de um controlador fuzzy.

### 1.5.1. Fuzzificação

Neste módulo cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy, ou seja, se  $x \in \mathbb{R}^n$  é uma entrada do sistema, o fuzzificador associa a esta entrada uma função de pertinência  $\mu_x(a)$ , ou em outros termos, associa um número fuzzy  $\hat{x} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Em muitos casos, a função  $\mu_x(a)$  é a própria função característica de  $x$ .

### 1.5.2. Módulo da base de regras

Este pode ser considerado como um módulo que faz parte do “núcleo” do controlador fuzzy. Ele é composto pelas proposições fuzzy e cada uma destas proposições é descrita na forma lingüística

$$\begin{aligned} &\text{Se } x_1 \text{ é } A_1 \text{ e } x_2 \text{ é } A_2 \text{ e } \cdots \text{ e } x_n \text{ é } A_n \\ &\text{então } y_1 \text{ é } B_1 \text{ e } y_2 \text{ é } B_2 \text{ e } \cdots \text{ se } y_m \text{ é } B_m, \end{aligned}$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são conjuntos fuzzy que representam termos lingüísticos das variáveis de entrada e saída, respectivamente. A expressão  $x_i \text{ é } A_i$  significa que  $\mu_{A_i}(x_i) \in [0; 1]$ . É aqui que as variáveis, agora lingüísticas, e suas classificações (adjetivos) são catalogadas e, em seguida, modeladas por funções de pertinência. A combinação destas regras é que gera uma saída  $\hat{y} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ . O Quadro 1 ilustra uma base de regras generalizada.

	$R_1$ : “ <b>Proposição fuzzy 1</b> ”
ou	
	$R_2$ : “ <b>Proposição fuzzy 2</b> ”
	.....
ou	
	$R_r$ : “ <b>Proposição fuzzy r</b> ”

Quadro 1: Forma geral de uma base de regras fuzzy.

Podemos estabelecer a idéia, embora de forma simplificada, que os controladores fuzzy são sistemas especialistas para os quais cada proposição fuzzy tem a forma

**Se** “condição”, **então** “ação”,

em que cada “condição” e cada “ação” são estados assumidos por variáveis lingüísticas que são por sua vez modeladas por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy que compõem a “condição” são chamados *antecedentes* e os que compõem a “ação” são chamados *consequentes*.

Neste módulo é que as informações do fenômeno a ser modelado são utilizadas para se definir a base de regras. Isso por que, para cada estado do sistema, definido a priori pelos termos lingüísticos da variável de entrada, deve se ter uma regra que o contemple. Desta forma quanto mais termos lingüísticos, mais informações são incorporadas ao modelo.

Com isso, quanto melhor se conhece o fenômeno, mais fácil será a tarefa de construir a base de regras. O auxílio de um especialista é útil a interação com o especialista é facilitada haja vista a base de regras utilizar termos lingüísticos. Isso significa que mesmo portanto mesmo alguém sem conhecimentos matemáticos sobre lógica fuzzy pode auxiliar na construção das regras.

Um número maior de regras também pode, de certo modo, facilitar representação da base para contemplar melhor as informações matemáticas que se quer representar.

### 1.5.3. Módulo de inferência fuzzy

É neste estágio que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada são determinados, através da base de regras, os valores das variáveis de saída.

Como vimos as sentenças da base de regras são ligadas por conectivos: *E* e *OU*. O método de inferência traduz estas regras matematicamente, por meio das t-norma e t-conorma, gerando para cada regra uma saída.

O método de inferência utilizado neste trabalho é conhecido como método de inferência de Mamdani ou método MAX-MIN. Este método segue o seguinte procedimento [2]:

1. Em cada regra  $R_j$ , da base de regras fuzzy, a condicional “Se  $x$  é  $A_j$  então  $y$  é  $B_j$ ” é modelada pela aplicação  $\wedge$  (mínimo);
2. Adota-se a t-norma  $\wedge$  (mínimo) para o conectivo lógico “e”;
3. Para o conectivo lógico “ou” adota-se a t-conorma  $\vee$  (máximo) que conecta as regras fuzzy da base de regras.

Formalmente, a relação fuzzy  $\mathcal{R}$  é o subconjunto fuzzy de  $X \times Y$  cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq r} (\mu_{R_i}(x, y)) = \max_{1 \leq i \leq r} [\mu_{A_j}(x) \wedge \mu_{B_j}(y)], \quad (1.1)$$

onde  $r$  é o número de regras que compõem a base de regras e,  $A_j$  e  $B_j$  são os subconjuntos fuzzy da regra  $j$ . Cada um dos valores  $\mu_{A_j}(x)$  e  $\mu_{B_j}(y)$  são interpretados como os graus com que  $x$  e  $y$  estão nos subconjuntos fuzzy  $A_j$  (entrada) e  $B_j$  (saída), respectivamente.

Para ilustrar como funciona o método de inferência de Mamdani, vamos utilizar duas regras genéricas que têm duas entradas e uma saída (Quadro 2) e mostrar a inferência graficamente na Figura 1.5.

$R_1$ :	<b>Se</b>	$x$ é $A_1$	<b>e</b>	$y$ é $B_1$	<b>então</b>	$z$ é $C_1$
$R_2$ :	<b>Se</b>	$x$ é $A_2$	<b>e</b>	$y$ é $B_2$	<b>então</b>	$z$ é $C_2$

Quadro 2: Regras genéricas para o controlador de Mamdani.

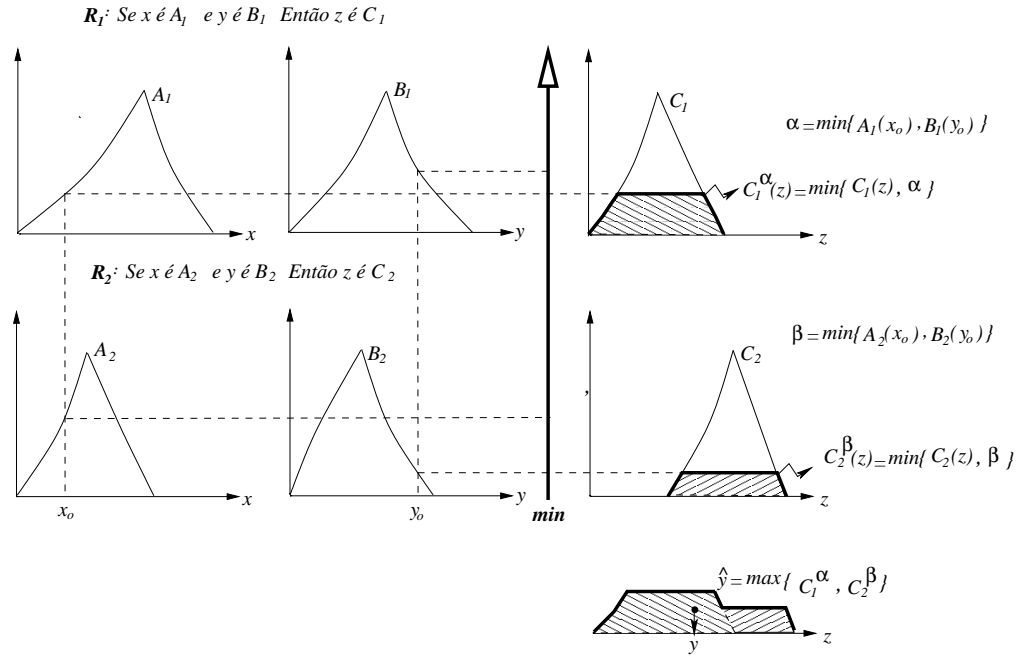


Figura 1.5.: Método de Mamdani.

#### 1.5.4. Módulo de Defuzzificação

O papel do defuzzificador é converter a saída dada pelo módulo de inferência, que é um conjunto fuzzy, em um número *crisp* (real) que bem o represente. Apesar de existirem muitos métodos de defuzzificação, utilizaremos sempre o método de *centro de gravidade* ou centróide.

Este método é parecido com uma média aritmética para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores  $\mu_C(z_i)$  que indicam o grau de compatibilidade do valor  $z_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $C$ .

O centro de gravidade dá então a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. Entre todos os métodos de defuzzificação ele é o preferido.

Para um domínio discreto temos

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \mu_C(z_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_C(z_i)}.$$

Para domínio contínuo é dado por

$$G(C) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y \mu_C(y) dy}{\int_{\mathbb{R}} \mu_C(y) dy}. \quad (1.2)$$

e pode ser visto na Figura 1.6.

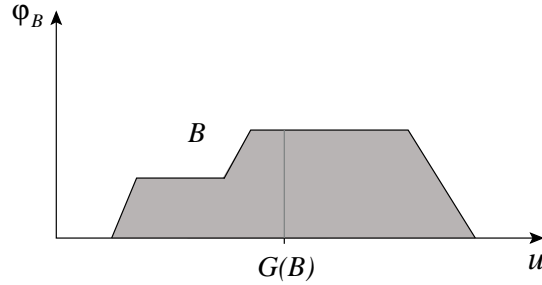


Figura 1.6.: Defuzzificador centro de gravidade  $G(C)$

## 1.6. Conclusão

Neste capítulo apresentamos as principais noções da teoria de conjuntos fuzzy, bem como de lógica fuzzy, em particular de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) necessárias para podermos estudar os sistemas p-fuzzy bem como para serem utilizadas nos controles de pragas determinados por regras fuzzy.

Pudemos perceber que um SBRF pode ser entendido como uma função  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ , haja vista que para cada entrada há uma única saída. Isso faz com que possamos utilizá-lo de

diversas maneiras para termos respostas de acordo com nossos estados. Em particular, neste trabalho utilizaremos-lo de duas maneiras diferentes. No capítulo 2 o SBRF determina a dinâmica populacional dos chamados sistemas p-fuzzy. Já no capítulo 3, utilizando-se de uma extensão do que terá sido visto no capítulo anterior, para criar usando a SBRF. Para finalizar, no capítulo 4 utilizaremos esta metodologia para determinar a maneira de utilização de um pesticida em uma plantação, com o objetivo de controlar a praga que o ataca.

## Capítulo 2.

# Sistemas P-Fuzzy

### 2.1. Introdução

Para se fazer modelos matemáticos de fenômenos em que as variáveis de estado estão sujeitas a variações ao longo do tempo tem se utilizado largamente as equações diferenciais e de diferenças determinísticas. Para que o modelo seja coerente faz-se necessário um grande conhecimento das relações entre as variáveis e suas variações, base das equações acima referidas. São estes conhecimentos que permitem a escolha das funções que relacionarão as variações e o estado das variáveis.

As equações diferenciais e de diferenças determinísticas são uma ferramenta poderosa para a modelagem de fenômenos cujas variáveis de estado estão sujeitas a variações temporais. Contudo, este tipo de ferramenta só é eficiente quando se conhece bem as relações existentes entre as variáveis e as variações. Mais que isso, essas relações ou funções possuem parâmetros que nem sempre são fáceis de se mensurar. Além disso pode ser que as relações existentes entre as variáveis e suas variações sejam apenas parcialmente (nebulosamente) conhecida, o que torna a modelagem determinística menos atraente.

Mais ainda, os parâmetros das equações de diferenças ou das diferenciais precisam ser mensurados ou estimados, o que quase sempre é uma tarefa fastidiosa, já que faz-se necessária, na maioria dos casos, a coleta de muitos dados para se conseguir que estes parâmetros descrevam bem o fenômeno a ser modelado.

Por outro lado, há também modelos com equações variacionais fuzzy que comportam subje-



tividades [18], estas não estão relacionadas diretamente as relações entre variáveis e variações o que torna sem utilidade nestes casos. Isso advém do fato de estas equações serem oriundas de modelos determinísticos. A subjetividade comportada pelas equações fuzzy se referem às imprecisões dos estados iniciais das variáveis ou nelas mesmas (*fuzziness demográfica*) e/ou nos parâmetros (*fuzziness ambiental*), situações que em geral estão presentes em equações de dinâmicas populacionais [1].

Neste capítulo apresentaremos os sistemas dinâmicos p-fuzzy, que nada mais são que sistemas iterativos baseados em regras fuzzy, isto é, um SBRF iterativo. Os sistemas p-fuzzy incorporam informações subjetivas tanto nas variáveis quanto nas variações e suas relações com as variáveis, o que os torna uma ferramenta útil em fenômenos parcialmente desconhecidos [9].

## 2.2. Sistemas Dinâmicos P-fuzzy

Denominamos *Sistema Dinâmico P-fuzzy* ao sistema iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $F(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_k + \Delta(\mathbf{x}_k)$ . Aqui  $\Delta(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^n$  é chamado *variação* e é obtido através da saída defuzzificada de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy, no caso, um controlador de Mamdani. Um sistema p-fuzzy é nada mais do que uma equação de diferenças  $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \Delta(\mathbf{x}_k)$  e sua arquitetura pode ser vista na Figura 2.1.

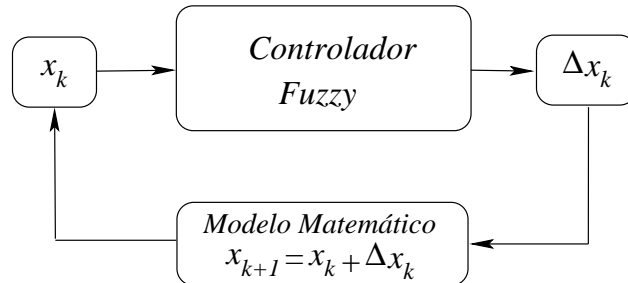


Figura 2.1.: Arquitetura de um Sistema P-fuzzy.

Em nosso trabalho, os sistemas p-fuzzy servirão para modelar a dinâmica populacional de

alguma praga, com o intuito de controlá-la. Vamos ver aqui alguns tipos de modelos de crescimento, tanto para sistemas unidimensionais, nos quais a praga é considerada sozinha no seu habitat, como sistemas bidimensionais do tipo presa-predador, nos quais a presa é a praga que é considerada interagindo com algum predador natural.

## 2.3. Sistemas P-fuzzy Unidimensionais

Os sistemas p-fuzzy unidimensionais são equações de diferenças em uma dimensão, com base no sistema (2.1), onde  $n = 1$ , i.e.,

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k) \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.2)$$

em que  $\Delta_x(x_k)$  é dado por um SBRF.

### 2.3.1. Equilíbrio e Estabilidade de Soluções

Sempre que estamos estudando equações que descrevem fenômenos, sobretudo biológicos, é desejável que saibamos quando as soluções encontradas por nosso modelo são pontos de equilíbrio do sistema bem como o tipo de comportamento destas soluções. Para que possamos fazer isso em sistemas p-fuzzy unidimensionais enunciaremos alguns resultados propostos por Silva [24].

**Definição 2.1** (Equilíbrio). *Dizemos que um número real  $x^*$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.2) se*

$$x^* = x_k = x_{k+1} \iff \Delta(x_k) = 0. \quad (2.3)$$

Para estudarmos a existência de equilíbrio de sistemas p-fuzzy, estabeleceremos as seguintes definições.

**Definição 2.2** (Subconjuntos Sucessivos). *Seja  $A = \{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , uma família de subconjuntos fuzzy normais associados a variável lingüística  $x$ . Dizemos que  $A$  é uma família de subconjuntos fuzzy sucessivos se satisfizerem:*

$$(i) \bigcup_{i=1}^k \text{supp}(A_i) = \mathbb{U}, \text{ em que } \mathbb{U} \text{ é o universo em que se está definindo os subconjuntos fuzzy;}$$

- (ii)  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_{i+1}) \neq \emptyset$ ;
- (iii)  $\text{supp}(A_i) \cap \text{supp}(A_j) = \emptyset$ , se  $|i - j| \geq 2$ ;
- (iv) Dados  $\bar{x}$  e  $\hat{x}$  com  $\mu_{A_i}(\bar{x}) = \mu_{A_{i+1}}(\hat{x}) = 1$  então  $\bar{x} < \hat{x}$ .

A condição (i) estabelece que a base de regras deve cobrir todo o universo em que se trabalha, ou seja,  $\forall x \in U; \exists A_i \subset A$  tal que  $\mu_{A_i}(x) \neq 0$ . A condição (iv) da definição acima, mostra-nos que os elementos têm grau de pertinência máximo a um único número fuzzy. As Figuras 2.2 e 2.5 são exemplos de famílias de subconjuntos fuzzy sucessivos.

A existência de equilíbrio está associada à mudança de sinal da saída  $\Delta(x)$  do sistema p-fuzzy. Esta mudança está, por sua vez, diretamente relacionada com a existência de oposição semântica nos conseqüentes da base de regras [2]. Formalmente temos a seguinte definição.

**Definição 2.3** (Conjunto e Região Viáveis de Equilíbrio). *Seja o sistema p-fuzzy (2.2) cuja base tenha antecedentes e conseqüentes famílias sucessivas de subconjuntos fuzzy,  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k_1}$  e  $\{B_j\}_{1 \leq j \leq k_2}$ . Se para algum  $i$  existirem  $\hat{x}, \bar{x} \in \text{supp}(A_i \cup A_{i+1})$  tal que  $\Delta(\hat{x}) \cdot \Delta(\bar{x}) < 0$ , então  $A^* = A_i \cap A_{i+1}$  é denominado conjunto viável de equilíbrio e  $\text{supp}(A^*)$  é uma região viável de equilíbrio.*

A partir desta definição veremos que é necessário que exista um conjunto viável de equilíbrio nos antecedentes da base de regras para que o sistema p-fuzzy admita um estado de equilíbrio  $x^*$ . Estas regras terão o seguinte formato

$  \begin{aligned}  R_i : \quad & \text{Se } x \text{ é } A_i \text{ então } \Delta(x) \text{ é } B_i \\  R_{i+1} : \quad & \text{Se } x \text{ é } A_{i+1} \text{ então } \Delta(x) \text{ é } B_{i+1};  \end{aligned}  $
--

em que  $\text{supp}(B_i) \subset \mathbb{R}_+$  e  $\text{supp}(B_{i+1}) \subset \mathbb{R}_-$  ou  $\text{supp}(B_i) \subset \mathbb{R}_-$  e  $\text{supp}(B_{i+1}) \subset \mathbb{R}_+$ .

**Teorema 2.4.** *Se um sistema p-fuzzy  $S$  admite um conjunto viável de equilíbrio  $A^*$ , com  $\text{supp}(A^*) \neq \emptyset$ , então existe pelo menos um estado de equilíbrio na região viável de equilíbrio  $\text{supp}(A^*)$ , isto é,  $\exists x^* \in \text{supp}(A^*)$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ .*

*Demonstração.* Consulte [24]. ■

A unicidade de ponto de equilíbrio exige algumas restrições nos conjuntos sucessivos que determinam os termos lingüísticos do conjunto p-fuzzy. Estas restrições são dadas pelo teorema abaixo.

**Teorema 2.5.** *Sejam  $\text{supp}(A^*) = \text{supp}(A_i \cup A_{i+1}) = (a_1^{i+1}; a_2^i)$  a região viável de equilíbrio,  $\mu_{A_i}, \mu_{A_{i+1}}$  monótonas em  $\text{supp}(A^*)$  e ainda  $a^i, a^{i+1}$  tais que  $\mu_{A_i}(a^i) = \mu_{A_{i+1}}(a^{i+1}) = 1$ . Se  $a^i \leq a_1^{i+1}$  e  $a^{i+1} \geq a_2^i$  então  $x^*$  é único em  $\text{supp}(A^*)$ .*

*Demonstração.* Consulte [24]. ■

Para análise de estabilidade lembramos que um sistema p-fuzzy é uma equação de diferenças dada por  $x_{k+1} = x_k + \Delta(x_k) = F(x_k)$ . Basta analisarmos o valor de  $F'(x^*)$ . Assim se  $-1 < F'(x^*) < 1$  teremos estabilidade do sistema p-fuzzy e instabilidade caso contrário. Conforme se pode ver em Silva [24, pg. 66–67],  $x^*$  pode ser:

- (i) assintoticamente estável com convergência monótona, se  $\Delta'(x^*) \in (-1; 0)$ ;
- (ii) assintoticamente estável com convergência oscilatória, se  $\Delta'(x^*) \in (-2; -1)$ ;
- (iii) neutralmente estável, se  $\Delta'(x^*) = 0$  ou  $\Delta'(x^*) = 2$ ;
- (iv) instável se  $\Delta'(x^*) \notin [-2; 0]$ .

Como  $\Delta(x^*)$  é dada pela defuzzificação do tipo centro de massa, (veja Seção 1.5.4), em que a Equação (1.2) é uma função diferenciável, este valor pode ser calculado numericamente [24].

Para se encontrar o valor de  $x^*$ , no caso do Teorema 2.5, temos dois casos. O primeiro deles é quando as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy que compõe a região viável de equilíbrio,  $\mu_{A_i}$  e  $\mu_{A_{i+1}}$  são monótonas e simétricas, isto é,  $\mu_{A_i}(x) = \mu_{A_{i+1}}(-x)$ . Conforme nos coloca Silva [24, Proposição 2.1, p. 24], se este for o caso, o ponto de equilíbrio estará na intersecção entre  $\mu_{A_i}$  e  $\mu_{A_{i+1}}$ .

Se este não for o caso, Cecconelo desenvolveu um algoritmo que aproxima numericamente o valor de  $x^*$ . O algoritmo em questão utiliza o fato de que encontrar a solução numérica de  $x^*$  é equivalente a encontrar o minimizador de  $\|\Delta(x)\|$  já que  $\Delta(x^*) = 0$ . (Para mais detalhes veja [7, pg. 69]).

### 2.3.2. Crescimento Malthusiano

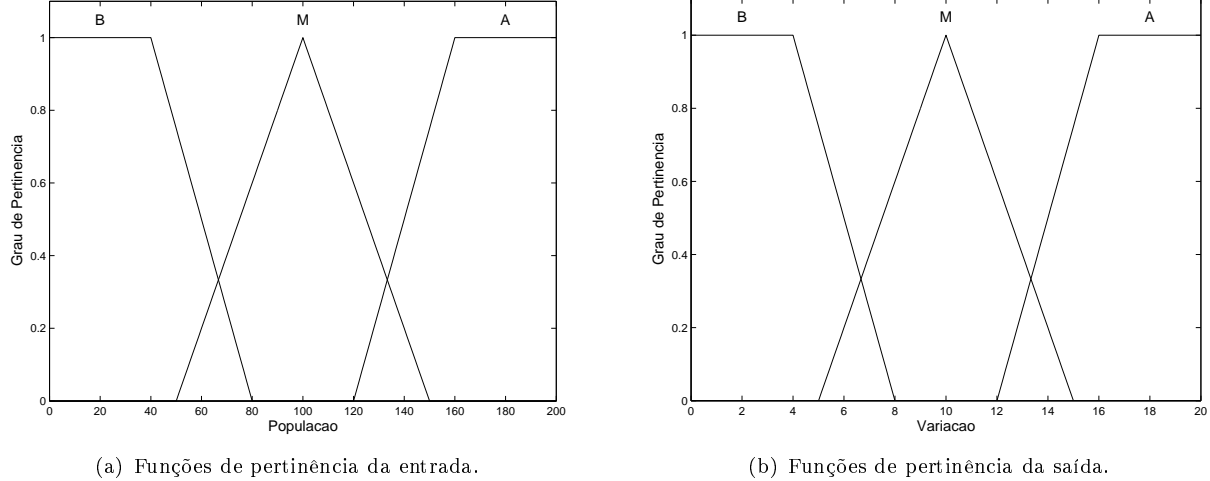
No intuito de modelar a dinâmica populacional de uma praga, vamos pensar primeiramente no princípio malthusiano de crescimento populacional:

*“A variação de uma população é proporcional a população em cada instante.”*

Este princípio determina que a variação populacional cresce na medida em que cresce a população. Quando utilizamos equações diferenciais para descrever esta população, sua solução nos dá um crescimento exponencial. É de se esperar que o modelo p-fuzzy tenha o mesmo comportamento.

Vamos definir as variáveis lingüísticas *população* ( $x_k$ ) e *variação* ( $\Delta(x_k)$ ) em que  $x_k$  será a entrada e  $\Delta(x_k)$  será a saída do sistema na interação  $k$ .

Definiremos tanto para população quanto para variação os termos lingüísticos  $\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_{\Delta(x)} = \{Baixa (B), Média (M) e Alta (A)\}$ . O que irá mudar neste caso será o suporte (supp) de cada um dos conjuntos de entrada e saída. As funções de pertinência para cada termo lingüístico das variáveis estão na Figura 2.2.



(a) Funções de pertinência da entrada.

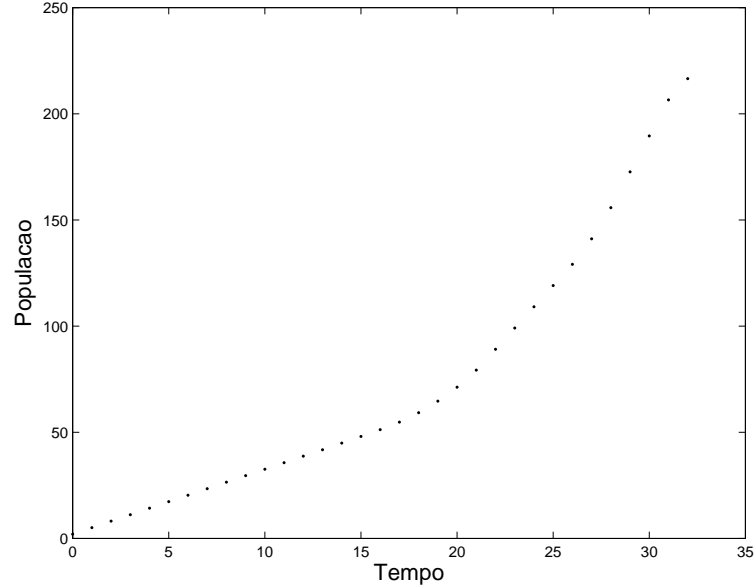
(b) Funções de pertinência da saída.

Figura 2.2.: Funções de pertinência para entrada e saída do sistema p-fuzzy com crescimento malthusiano.

A base de regras deste modelo está no Quadro 3. Esta base representa exatamente o princípio malthusiano enunciado acima, já que determina que quanto maior (ou menor) for uma população, maior (ou menor) será sua variação absoluta. A trajetória da população está ilustrada na Figura 2.3 e é compatível com a solução dada pelo modelo de malthus determinístico [10, 19].

$R_1$ :	Se a população é “baixa” ( $B$ ) então a variação é “baixa” ( $B$ )
$R_2$ :	Se a população é “média” ( $M$ ) então a variação é “média” ( $M$ )
$R_3$ :	Se a população é “alta” ( $A$ ) então a variação é “alta” ( $A$ ).

Quadro 3: Base de regras para modelar crescimento malthusiano.

Figura 2.3.: Trajetória de uma população através do sistema p-fuzzy do tipo malthusiano (base de regras do Quadro 3) com  $x_0 = 2$ .

### 2.3.3. Crescimento Inibido do tipo Logístico

O modelo malthusiano, embora seja um paradigma na história dos modelos matemáticos para populações homogeneamente distribuídas, não é observado na realidade, a não ser em um curto período de tempo, se a população inicial é *baixa*. Há fatores que impedem uma população de crescer exponencialmente tais como disputa por espaço, alimentação, competição com outros indivíduos da mesma e de outras espécies, etc. Assim há uma espécie de limiar, denominado *capacidade de suporte* ( $k$ ), no qual a população tende a se estabilizar. Desta forma quando a população está acima da capacidade de suporte  $k$ , o número de indivíduos da espécie diminui ( $\Delta(x) < 0$ ). Por outro lado quando o número de indivíduos está abaixo de  $k$  a sua quantidade aumenta ( $\Delta(x) > 0$ ). Mais que isso, dependendo do número de indivíduos, este crescimento é maior ou menor. Este processo pode

ser visto na Figura 2.4.



Figura 2.4.: Campo de variações: ( $\rightarrow$ ) variação positiva; ( $\leftarrow$ ) variação negativa.

O primeiro modelo, denominado logístico, que leva em conta a inibição do crescimento populacional foi proposto por Verhulst [19, pg. 3], que colocou em seu modelo um processo auto-limitante. No entanto há outros que também levam em conta este limiar e são chamados logísticos, por conta do tipo de soluções que são encontradas a partir das equações diferenciais que os descrevem. Deste ponto de vista o comportamento pode ser determinado por

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.4)$$

em que  $x$  é o número de indivíduos da população e  $f$  tem as seguintes propriedades:

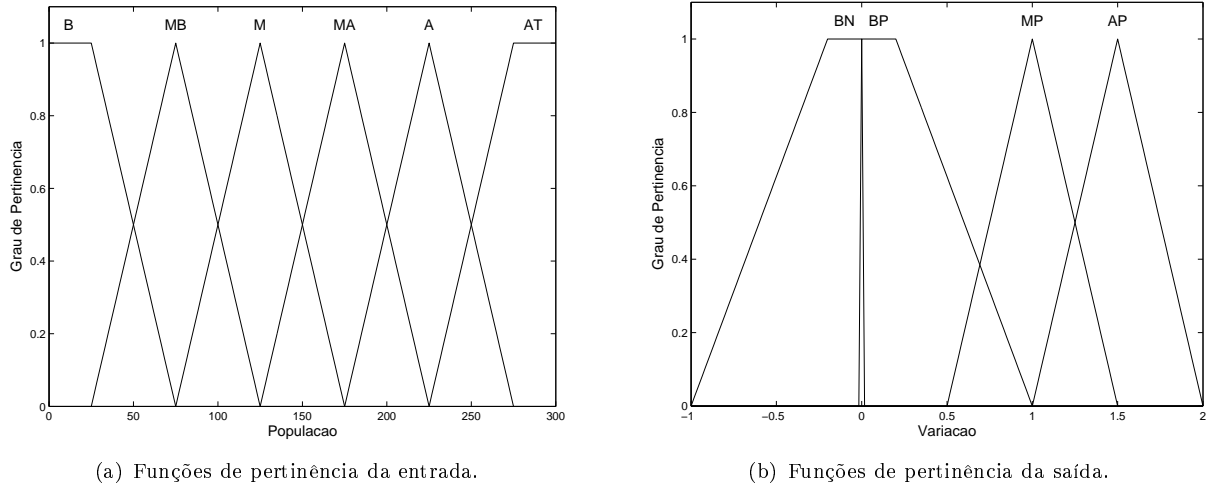
- (i) Se  $x > k$  então  $f(x) < 0$ ;
- (ii) Se  $x < k$  então  $f(x) > 0$ .

O estabelecimento de  $f$  de forma satisfatória nem sempre é fácil, em especial quando a dinâmica populacional é parcialmente conhecida. Uma consequência advinda desta situação é que a capacidade de suporte  $k$  também será parcialmente conhecida. Logo não podemos determinar com exatidão o momento em que  $f$  muda de sinal. Por outro lado, por exemplo podemos saber, através do processo de modelagem, que quando o número de indivíduos de uma população é *altíssimo* a população decresce.

Para construirmos o modelo p-fuzzy para populações com crescimento inibido, continuamos, como no caso malthusiano com uma entrada (população  $x$ ) e uma saída (variação  $\Delta(x)$ ). No entanto, os termos lingüísticos que descreverão as variáveis e obviamente a base de regras serão diferentes.

Utilizaremos os termos lingüísticos  $\mathcal{T}_x = \{Baixa (B), Média Baixa (MB), Média (M), Média Alta (MA), Alta (A), e Altíssima (AT)\}$  com o objetivo de determinar subjetivamente os estados (número de indivíduos) que a população pode assumir.

Da mesma forma os termos lingüísticos  $\mathcal{T}_{\Delta(x)} = \{Baixa\ Negativa\ (BN),\ Baixa\ Positiva\ (BP),\ Média\ Positiva\ (MP)\ e\ Alta\ Positiva\ (AP)\}$  representarão os estados assumidos pela variável *variação*. As funções de pertinência estão ilustradas na Figura 2.5.



(a) Funções de pertinência da entrada.

(b) Funções de pertinência da saída.

Figura 2.5.: Funções de pertinência para entrada e saída do sistema p-fuzzy com crescimento inibido do tipo logístico.

Note-se que enquanto a população apenas foi dividida de forma diferente através de outros termos lingüísticos, a variação além de ser dividida diferentemente, tem funções de pertinência com suportes tanto positivos quanto negativos. Esta situação está de acordo com os modelos determinísticos inibidos clássicos como os de Verhulst, Motroll e seus derivados [10].

O modelo proposto por Verhulst, como já dissemos, propunha um limitador intrínseco no crescimento populacional. Em outras palavras, quando temos uma população *baixa* o crescimento é igual ao modelo exponencial, positivo. Quando temos uma população *média*, o crescimento ainda é positivo, porém com intensidade menor. Quando a população se torna *alta* ou *muito alta* é que o processo de limitação começa a operar, fazendo o crescimento populacional passar de *positivo* para *negativo*. Estes tipos de hipóteses são bem descritas por regras fuzzy. A base de regras fuzzy que utilizamos para modelar este tipo de fenômeno está no Quadro 4.

As trajetórias (soluções) da população, esboçadas na Figura 2.6, mostra-nos que independentemente do ponto inicial, a população tende a um ponto de equilíbrio, no caso  $x^* = 254.3503$ . Para demonstrarmos este fato, vamos fazer uso dos teoremas descritos no início desta seção.



$R_1$ :	<b>Se</b> a população é “baixa” ( $B$ ) <b>então</b> a variação é “baixa positiva” ( $BP$ )
$R_2$ :	<b>Se</b> a população é “média baixa” ( $MB$ ) <b>então</b> a variação é “média positiva” ( $MP$ )
$R_3$ :	<b>Se</b> a população é “média” ( $M$ ) <b>então</b> a variação é “alta positiva” ( $AP$ )
$R_4$ :	<b>Se</b> a população é “média alta” ( $MA$ ) <b>então</b> a variação é “média positiva” ( $MP$ )
$R_5$ :	<b>Se</b> a população é “alta” ( $A$ ) <b>então</b> a variação é “baixa positiva” ( $BP$ )
$R_6$ :	<b>Se</b> a população é “altíssima” ( $AT$ ) <b>então</b> a variação é “baixa negativa” ( $BN$ )

Quadro 4: Base de regras para modelar a variação da população do tipo logístico.

Estamos tentando procurar  $x^*$  tal que  $\Delta(x^*) = 0$ . Para tanto primeiro podemos facilmente verificar que os antecedentes da base de regras proposta para o modelo logístico se encaixam na definição de subconjuntos sucessivos. Além disso há em nossa base de regras (Quadro 4), entre as regras  $R_4$  e  $R_5$ , oposição semântica como conseqüentes destas, isto é,  $\exists x_1, x_2 \in (A \cup AT)$  tais que  $\Delta(x_1) \cdot \Delta(x_2) < 0$ .

Desta forma se  $I^* = (A \cap AT)$ ,  $\text{supp}(I^*) = (225; 275) \neq \emptyset$  é região viável de equilíbrio. Pelo Teorema 2.4 existe então  $x^* \in (225; 275)$ , ponto de equilíbrio do sistema p-fuzzy em questão.

Mostremos agora que  $x^*$  é único. De fato temos que  $\mu_A$  e  $\mu_{AT}$  são monótonas em  $\text{supp}(I^*) = \text{supp}(225; 275)$ . Além disso,  $\mu_A(225) = \mu_{AT}(275) = 1$  e  $\forall q \in (A \cap AT)$  temos que  $225 < q < 275$ . Estas hipóteses satisfazem o Teorema 2.5 demonstrando que  $x^*$  é único. Para mostrar que  $x^* = 250$  utilizamo-nos do algoritmo proposto por Cecconello, cujo idéia foi esboçada anteriormente.

## 2.4. Sistemas P-fuzzy Bidimensionais

Um *Sistema P-fuzzy Bidimensional*, tomando por base a equação (2.1), pode ser descrito através do sistema de equações discretas

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k) = F(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k) = G(x_k, y_k) \\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad , \quad (2.5)$$

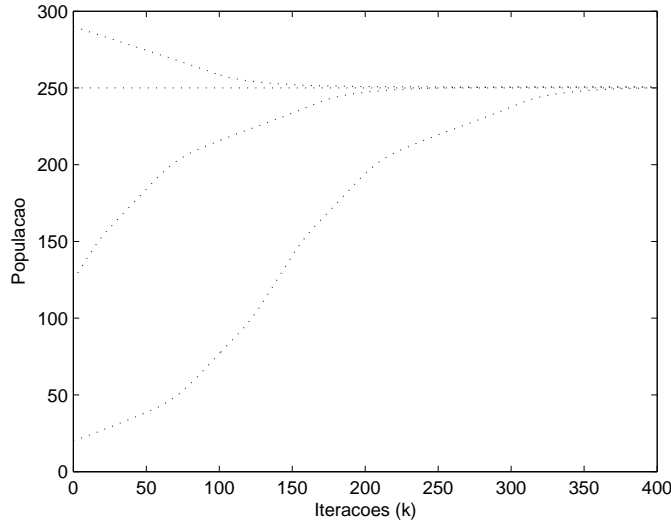


Figura 2.6.: Trajetória do modelo p-fuzzy logístico para  $x_0 = 20, 125$  e  $290$ .

onde as variações, ou incrementos,  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  são dadas através de um SBRF, cujas regras satisfazem a seguinte estrutura:

“Se  $x$  está em  $A_i$  e  $y$  está em  $B_i$ , então  $\Delta_x$  está em  $C_i$  e  $\Delta_y$  está em  $D_i$ ”.

em que  $x$  e  $y$  são variáveis lingüísticas e  $\Delta_x(x_k, y_k)$  e  $\Delta_y(x_k, y_k)$  são determinadas pela defuzzificação, através do Centro de Massa, dos conjuntos fuzzy formados na composição das regras de um SBRF, utilizando novamente o método de Mamdani. Isto posto, o que queremos é estabelecer uma base de regras para que o sistema (2.5) modele uma interação interespecífica, sendo que para isso faz-se necessário o estabelecimento de um SBRF de acordo com o fenômeno desejado.

### 2.4.1. Estabilidade e Equilíbrio de Soluções

Definiremos um ponto de equilíbrio de sistemas p-fuzzy bidimensionais de modo análogo aos sistemas fuzzy unidimensionais.

**Definição 2.6** (Equilíbrio). *Um par real  $(x^*, y^*)$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.5) se*

$$\begin{cases} x^* = F(x^*, y^*) \\ y^* = G(x^*, y^*) \end{cases} \iff \begin{cases} \Delta_x(x^*, y^*) = 0 \\ \Delta_y(x^*, y^*) = 0 \end{cases}. \quad (2.6)$$

Também analogamente aos sistemas unidimensionais, vamos definir a região viável de equilíbrio para sistemas bidimensionais. Aqui vale comentar que na verdade o que faremos é estender a Definição 2.3 para duas dimensões, fazendo uso da Definição 2.2, considerando então cada variável separadamente (apenas para determinar a região e conjunto de equilíbrios) e fazendo então o produto cartesiano das mesma.

**Definição 2.7** (Região Viável de Equilíbrio Bidimensional). *Sejam  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k_1}$  e  $\{B_j\}_{1 \leq j \leq k_2}$  as famílias sucessivas de subconjuntos fuzzy associadas respectivamente aos termos lingüísticos das variáveis de entrada  $x$  e  $y$ . Se  $A^* = A_i \cup A_{i+1}$  e  $B^* = B_j \cup B_{j+1}$  são conjuntos viáveis de equilíbrio para as variáveis  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ , no sentido da Definição 2.3, então dizemos que  $R^* = \text{supp}(A^*) \times \text{supp}(B^*)$  é região viável de equilíbrio para o sistema p-fuzzy (2.5) (Ver Figura 2.7).*

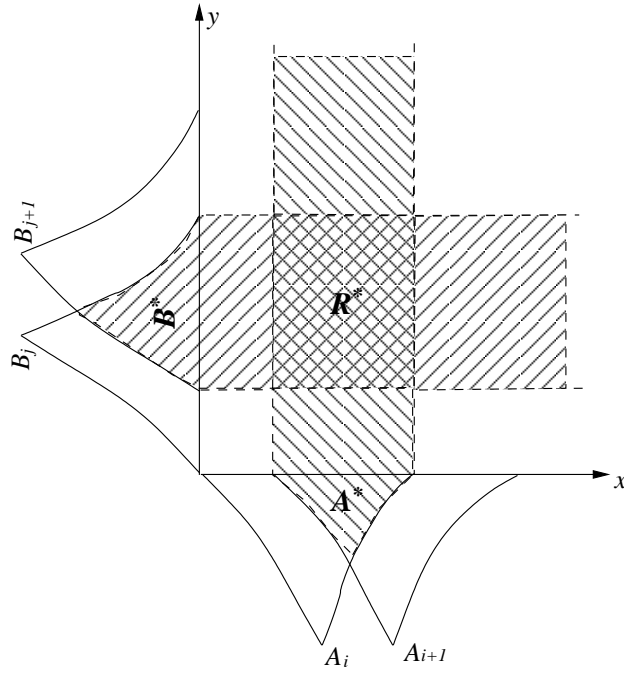


Figura 2.7.: Região viável de equilíbrio  $R^*$  da Definição 2.7

Ainda com base na Definição 2.3, para que  $\text{supp}(A^*)$  e  $\text{supp}(B^*)$  sejam regiões viáveis de equilíbrio é necessário também que o sistema p-fuzzy provenha de um SBRF tal que os conjuntos  $A_i$ ,  $A_{i+1}$ ,  $B_j$  e  $B_{j+1}$  estejam associados aos conjuntos fuzzy  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $D_x$  e  $D_y$  através das regras

$R_1 : \text{ Se a } x \text{ é } A_i \text{ e } y \text{ é } B_j \text{ então a } \Delta_x \text{ é } D_x \text{ e } \Delta_y \text{ é } C_y$
$R_2 : \text{ Se a } x \text{ é } A_i \text{ e } y \text{ é } B_{j+1} \text{ então a } \Delta_x \text{ é } C_x \text{ e } \Delta_y \text{ é } C_y$
$R_3 : \text{ Se a } x \text{ é } A_{i+1} \text{ e } y \text{ é } B_j \text{ então a } \Delta_x \text{ é } D_x \text{ e } \Delta_y \text{ é } D_y$
$R_4 : \text{ Se a } x \text{ é } A_{i+1} \text{ e } y \text{ é } B_{j+1} \text{ então a } \Delta_x \text{ é } C_x \text{ e } \Delta_y \text{ é } D_y$

em que  $\text{supp}(C_x), \text{supp}(C_y) \subset \mathbb{R}_-$  e  $\text{supp}(D_x), \text{supp}(D_y) \subset \mathbb{R}_+$ , ou então variações das mesmas. Essas duas condições indicam *oposição semântica* nas variáveis de saída  $\Delta$ , da mesma forma que no caso unidimensional. Além disso sabe-se que existem apenas 8 variações ou combinações possíveis [7]. Essas combinações tem o objetivo de determinar o tipo de interações interespecífica.

Silva demonstrou que quando  $R^*$  for uma região viável de equilíbrio, conforme definição acima, então há pelo menos um ponto de equilíbrio  $(x^*, y^*) \in R^*$  [24, Teorema 3.1]. Além disso, desenvolveu método para identificação do mesmo (ou dos mesmos). Cecconelo [7, Teorema 3.4.3] identificou as condições para a existência de um estado de equilíbrio único para sistemas bidimensionais. Esses resultados serão utilizados implicitamente na seção seguinte para estabelecer a dinâmica populacional de um sistema presa-predador, com base no modelo de Kolmogorov.

### 2.4.2. Modelo de Kolmogorov

Para que possamos entender como montamos as regras, que servirão de base para determinar as variações ( $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ ) do sistema, vamos estabelecer algumas propriedades de sistemas de interação entre espécies. Este entendimento será feito através do Modelo Geral de Kolmogorov [10], que serve como generalizador de todos os tipos de interação entre espécies.

Seja então um sistema de interação entre espécies, em que as variações populacionais a cada instante de tempo dependam somente de suas respectivas densidades. Daí podemos propor um modelo de equações não autônomas

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xf(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = yg(x, y) \end{cases}, \quad (2.7)$$

em que as características do tipo de interação são modeladas através do comportamento das funções  $f$  e  $g$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} < 0.$$

No caso de uma interação do tipo *presa-predador*, uma espécie é beneficiada (predador  $[g]$ ) enquanto a outra é prejudicada (presa  $[f]$ ). Neste caso, as funções satisfazem

$$\frac{\partial f}{\partial y} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0.$$

No caso, entende-se por predação uma interação negativa, onde uma espécie ataca a outra para se alimentar, sendo que o tempo gasto para se alimentar de cada presa é menor do que o período de alimentação da fase em que o predador se encontra. Por esse motivo, um predador necessita de diversos indivíduos da espécie (presa) para o seu desenvolvimento completo ou sua manutenção, causando a morte violenta de suas vítimas.

Neste tipo de interação, o predador dificilmente extermina totalmente o número de presa isto por que se a presa for extinta, não haverá alimento para o predador. O que ocorre geralmente é, ao entrar no ambiente, o predador ocasione diminuição de densidade populacional de presa (alimento). Claro que a diminuição desta densidade, e em consequência, a quantidade de alimento disponível, diminui também o número de predadores (por conta da diminuição da reprodução pela baixa de recursos nutritivos bem como pelo aumento da competição intraespecífica), mais ainda se temos uma interação exclusivista. Isto diminui a “pressão” sobre as presas facultando um aumento populacional logo mais alimento para os predadores. Isto indica que temos sempre situações oscilatórias, em que, dependendo do caso, temos até um equilíbrio, quase sempre dinâmico. Esta ocorrência é comum a todos as interações presa-predador, e portanto é presente na generalidade dos modelos [11].

Quando temos *mutualismo*, ambas as espécies são beneficiadas com a presença da outra, e logo teremos as seguintes características

$$\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x} > 0.$$

Pode haver casos em que há alguma competição *intraespecífica*, então as funções  $f$  e  $g$  devem

ser decrescentes com relação a  $x(t)$  e  $y(t)$  respectivamente, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y} < 0.$$

Pode-se pensar também em algum tipo de *capacidade de suporte*, particularmente quando a interação interespecífica é facultativa. Com isso devem existir constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $f(c_1, 0) = 0$  e  $g(0, c_2) = 0$ .

Não obstante já termos trabalhado com um outro modelo do tipo presa-predador (Lotka-Volterra) no capítulo inicial, a utilização do modelo geral de Kolmogorov, além considerar aquelas hipóteses, possibilita uma melhor percepção do que acontece com as funções variação ( $f$  e  $g$ ), dependendo do tipo de interação, conforme já vimos. Isso faz com que a modelagem fuzzy, principalmente da variação populacional, seja facilitada, já que utilizaremos, como no caso unidimensional, variáveis lingüísticas.

### 2.4.3. Construindo a Base de Regras para Presa-Predador

Como vimos, a característica do tipo de interação é dada através das derivadas parciais  $f_y$  e  $g_x$ . Um modelo do tipo presa-predador, segundo o modelo geral de Kolmogorov, tem a característica de ser prejudicial a uma espécie (presa) e benéfica à outra (predador). Basicamente então deveremos ter, para o um sistema presa-predador, que:

- (i) a variação populacional para presas é decrescente com relação a população de predadores ( $f_y < 0$ );
- (ii) a variação populacional para predadores é crescente com relação a população de presas ( $g_x > 0$ ).

Se tivermos uma interação facultativa, em que o predador pode se alimentar de outras presas, as densidades populacionais tanto de presas quanto de predadores podem ser limitadas por sua capacidade de suporte. Com isso teremos que a densidade dos predadores é maior no estado de equilíbrio não-nulo do que sua capacidade de suporte. Com as presas acontece o inverso e a densidade é menor que a capacidade de suporte, no estado de equilíbrio não-nulo. De modo geral, nos modelos temos que a interação é obrigatória, isto é, o predador somente se alimenta das presas.

Para modelar corretamente as variáveis através de uma base de regras utilizaremos como termos lingüísticos  $\mathcal{T}_p = \{Baixa (B), Média Baixa (MB) e Média Alta (MA) e Alta (A)\}$  com o objetivo de determinar subjetivamente os estados assumidos pela variável lingüística *população* ( $p = x, y$ ). Da mesma forma os termos lingüísticos  $\mathcal{T}_{\Delta_p} = \{Alta Negativa (AN), Média Alta Negativa (MAN), Média Baixa Negativa (MBN), Baixa Negativa (BN), Baixa Positiva (BP), Média Baixa Positiva (MBP), Média Alta Positiva (MAP) e Alta Positiva (AP)\}$  representarão os estados assumidos pela variável *variação da população* ( $\Delta_p = \Delta_x, \Delta_y$ ). As funções de pertinência para cada uma das variáveis se encontra na Figura 2.8.

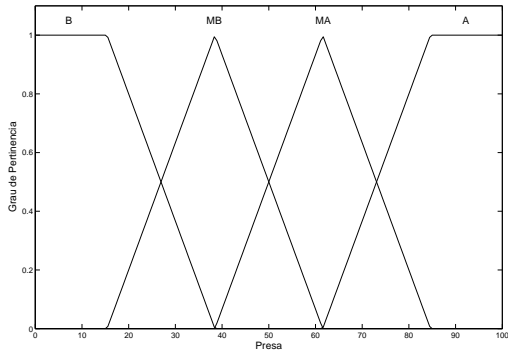
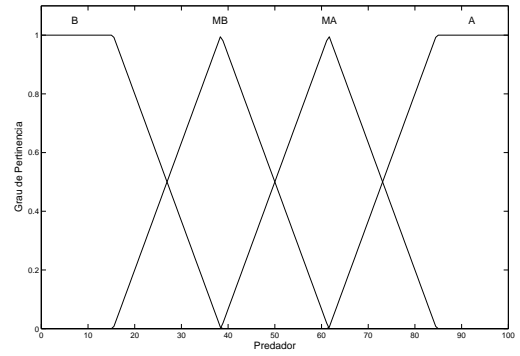
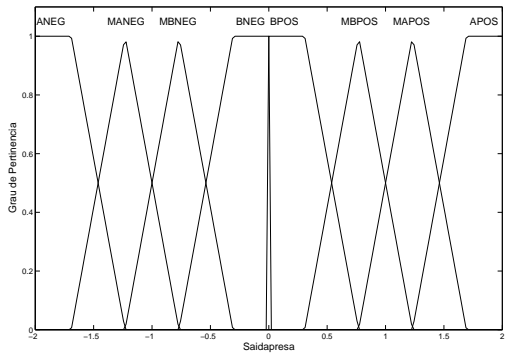
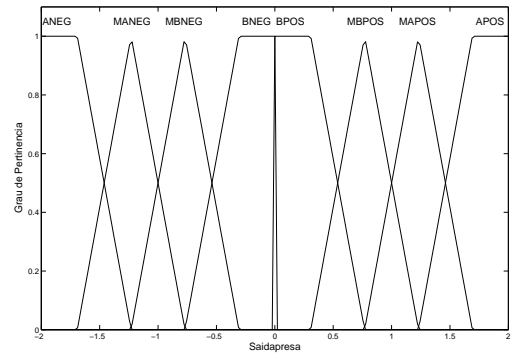
(a) Densidade Presa ( $x$ )(b) Densidade Predador ( $y$ )(c) Variação Presa ( $\Delta_x$ )(d) Densidade Predador ( $\Delta_y$ )

Figura 2.8.: Funções de pertinência para as variáveis de entrada e saída do sistema p-fuzzy bidimensional.

### Equilíbrio Assintoticamente Estável

A primeira base de regras que apresentaremos (Quadro 5) considerará que a interação é facultativa para as presas, fazendo com que a haja variação negativa de sua população, caso sua densidade populacional seja alta. Além disso, caso não haja população de predadores, as presas crescerão até a capacidade de suporte a ser alcançada. Ceconello [7] mostrou que para esta base, o estado de equilíbrio está em  $(50, 50)$  e que este ponto é assintoticamente estável, o que pode ser visto na Figura 2.10(a).

$R_1$ :	Se a $x$ é $B$ e $y$ é $B$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_2$ :	Se a $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_3$ :	Se a $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_4$ :	Se a $x$ é $B$ e $y$ é $A$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_5$ :	Se a $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_6$ :	Se a $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_7$ :	Se a $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_8$ :	Se a $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_9$ :	Se a $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{10}$ :	Se a $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{11}$ :	Se a $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{12}$ :	Se a $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{13}$ :	Se a $x$ é $A$ e $y$ é $B$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{14}$ :	Se a $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{15}$ :	Se a $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{16}$ :	Se a $x$ é $A$ e $y$ é $A$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BP$

Quadro 5: Base de regras modelo Presa-Predador de Kolmogorov com interação facultativa e ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

A Figura 2.9 mostra as direções de fluxo do sistema p-fuzzy com a base de regras do Quadro 5, caracterizando cada regra. Observa-se que justamente nas regiões correspondentes às regras  $R_6$ ,  $R_7$ ,  $R_{10}$  e  $R_{11}$  é que encontramos a oposição semântica necessária para a existência de uma região viável de equilíbrio. A solução e o plano de fase deste sistema é dada na Figura 2.10.



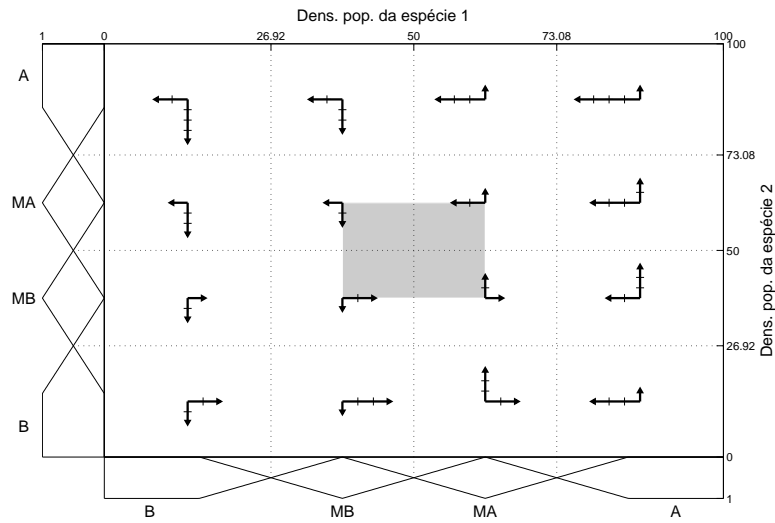
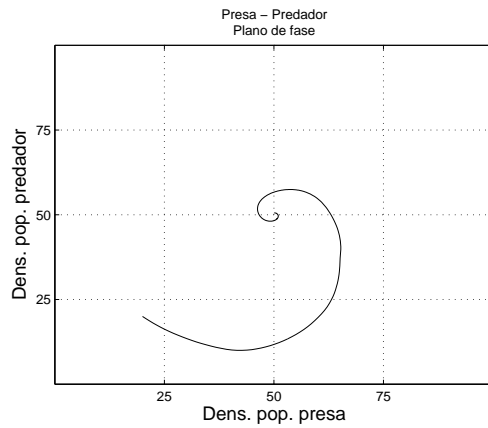
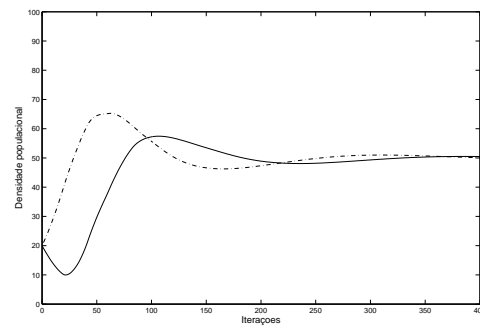


Figura 2.9.: Direções de fluxo para o sistema p-fuzzy do Quadro 5.



(a) Plano de fase com  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 20$ .



(b) Solução do sistema p-fuzzy bidimensional com  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada) .

Figura 2.10.: Solução e plano de fase do sistema p-fuzzy bidimensional para o Quadro 5.

### Equilíbrio Instável

A segunda base de regras leva em conta que em interações do tipo presa-predador, as densidades populacionais em geral apresentam flutuações em torno do estado de equilíbrio ao longo do tempo. Apesar de a solução do sistema p-fuzzy gerada pela base de regras do Quadro 5 apresentar tais oscilações, no caso de  $k \rightarrow \infty$ , a amplitude destas oscilações torna-se constante. Com algumas mudanças nesta base é possível obter soluções com a periodicidade desejada, mesmo que  $k \rightarrow \infty$ , e ainda conservando as características de uma interação do tipo presa-predador. Esta nova base está apresentada no Quadro 6.

$R_1$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $B$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $B$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBP$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBN$
$R_2$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $B$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MB$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $BP$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBN$
$R_3$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $B$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MA$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $BN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MAN$
$R_4$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $B$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $A$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $AN$
$R_5$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MB$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $B$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $AP$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $BN$
$R_6$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MB$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MB$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBP$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBN$
$R_7$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MB$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MA$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBN$
$R_8$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MB$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $A$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MAN$
$R_9$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MA$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $B$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MAP$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MAP$
$R_{10}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MA$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MB$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBP$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBP$
$R_{11}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MA$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MA$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBP$
$R_{12}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $MA$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $A$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MAN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $BP$
$R_{13}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $A$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $B$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $BN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MAP$
$R_{14}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $A$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MB$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MBN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MAP$
$R_{15}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $A$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $MA$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $MAN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBP$
$R_{16}$ :	<b>Se</b> $x$ <b>é</b> $A$ <b>e</b> $y$ <b>é</b> $A$ <b>então</b> $\Delta_x$ <b>é</b> $AN$ <b>e</b> $\Delta_y$ <b>é</b> $MBP$

Quadro 6: Base de regras modelo Presa-Predador de Kolmogorov com interação facultativa e ponto de equilíbrio assintoticamente instável.

Observa-se agora na Figura 2.11 as direções de fluxo do sistema p-fuzzy com a base de regras do Quadro 5, caracterizando cada regra. Na região hachurada correspondente às regras  $R_6, R_7, R_{10}$  e  $R_{11}$  é que encontramos a oposição semântica necessária para a existência de uma região viável de equilíbrio. A solução e o plano de fase deste sistema é dada na Figura 2.10. Note-se que há agora um

ponto de equilíbrio instável em  $(50, 50)$  e por isso as trajetórias se afastam deste ponto. Ao mesmo tempo as populações não podem crescer infinitamente, haja vista a existência de capacidades de suporte. Isso faz com que esta base gere um sistema p-fuzzy com ciclo limite (Figura 2.12(a)).

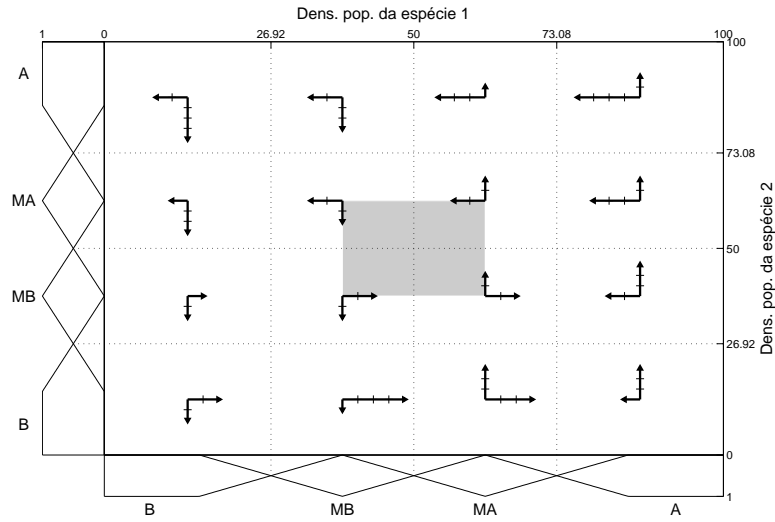
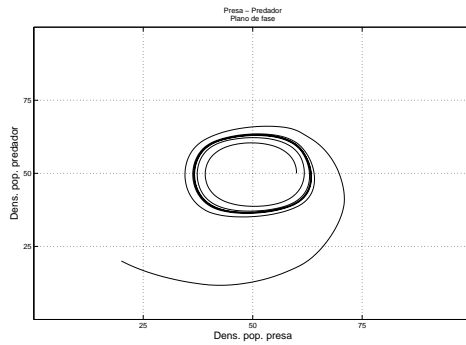
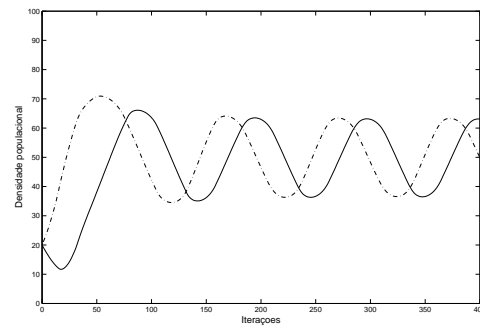


Figura 2.11.: Direções de fluxo para o sistema p-fuzzy do Quadro 6.



(a) Plano de fase com pontos iniciais  $(20, 20)$  e  $(60, 50)$ .



(b) Solução do sistema p-fuzzy bidimensional com  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada).

Figura 2.12.: Solução e plano de fase do sistema p-fuzzy bidimensional para o Quadro 6.

## 2.5. Conclusões

Neste capítulo vimos como um SBRF pode ser utilizado para construir um sistema de equações de diferenças que determine a densidade populacional de uma espécie ou de interações entre es-

pécies, em particular, do tipo presa-predador. Vimos também que há condições que derterminam equilíbrio e estabilidade de soluções tanto para os modelos uni quanto para os bidimensionais e que os experimentos numéricos dão uma idéia e cujas soluções se aproximam dos modelos clássicos determinísticos.

Este tipo de modelagem servirá de base para que no Capítulo 3 se construa sistemas p-fuzzy que levem em conta também fatores ambientais. Além disso no Capítulo 4, também usaremos os sistemas p-fuzzy aqui descritos para fazer um modelo teórico que possa controlar uma determinada praga, considerada sozinha ou tendo um predador natural.

## Capítulo 3.

# Dinâmica Populacional Fuzzy com Condição Ambiental

### 3.1. Motivação

Quando se está estudando a dinâmica de uma determinada população, muitos modelos, em particular os clássicos, levam em conta apenas fatores intrínsecos da espécie durante a formulação do modelo [3]. Por fatores intrínsecos entendemos tamanho ou densidade da população (vide modelo de Malthus), mortalidade e natalidade, fatores genéticos, etc.

No entanto, devido a complexidade dos fenômenos biológicos, quase sempre, há fatores extrínsecos, ou externos, que são determinantes na dinâmica de uma população e que não são constantes [23]. Chamaremos estes fatores genericamente de *Condição Ambiental*. Estão englobados fatores como temperatura do ambiente, chuva ou molhamento, seca, poluição, entre outros.

É fato que, ao se trabalhar com os modelos clássicos de equações diferenciais ou de diferenças, os parâmetros são escolhidos de tal forma que melhor representem as condições ambientais. Isto nem sempre é feito de maneira satisfatória, em particular, quando os parâmetros são escolhidos como constantes, mesmo que estes parâmetros variem com o tempo. Isso quase sempre é feito por conta da ausência de dados ou no caso de existirem, da dificuldade de modelá-los e representá-los de forma correta.

Quase sempre este tipo de fenômeno requer uma abordagem não-autônoma, quando se utiliza

de um modelo baseado em equações diferenciais. Isso pode ser deduzido a partir da constatação de que as condições ambientais são de certa forma, dependentes do tempo.

Tomemos como exemplo uma determinada espécie que tenha seu crescimento diferenciado de acordo com a época do ano. Suponha que este crescimento é maior na temporada de calor. Isso significa que uma condição ambiental (temperatura média), que por sua vez é sazonal, influencia na capacidade reprodutiva dos indivíduos e portanto, as taxas de crescimento serão diferenciadas de acordo com a época que se está observando.

Uma tentativa de modelar um fenômeno sazonal, porém de forma diferente desta descrita acima, foi feita por Solberg e seus colaboradores [25]. Em seu trabalho, eles modelam a variação populacional de uma população cuja densidade está relacionada com variações bruscas do clima, em regiões como o Ártico, e que estão sujeitas a condições extremas de variação. Estas variações, no entanto são consideradas estocásticas.

No modelo que propomos, ao invés de considerarmos essas variações constantes, ou ainda estocásticas, utilizaremos de uma SBRF para determiná-las. Serão apresentados dois modelos, um levando-se em conta apenas uma espécie e o segundo, modificando-se o modelo presa-predador de Kolmogorov.

## 3.2. Modelo Unidimensional

### 3.2.1. Modelagem

O modelo unidimensional, por ser mais simples, tem o objetivo de mostrar quão robusto é o sistema e além disso auxiliar no processo de entendimento da variação sazonal. Neste caso, utilizaremos um SBRF que não só nos dê a variação em função da própria população mas também leve em conta o período (tempo).

A base de regras deste controlador pode ser construída com auxílio de um especialista em uma aplicação do modelo. Este poderá ajudar na qualificação e quantificação da influência condição ambiental no sistema. Como nossa modelagem será feita através de sistemas p-fuzzy discretos, iremos em cada interação atualizar os valores do fator ambiental. Isso ficará mais claro adiante.

Neste caso, estamos propondo um modelo teórico e para tal, utilizaremos as seguintes hipóteses:

- (i) Assim como nos modelos propostos no cap. 2, a densidade populacional da espécie será representada pela variável *população* ( $x$ ), que utiliza-se dos termos lingüísticos  $\mathcal{T}_x = \{Baixa (B), Média Baixa (MB) e Média Alta (MA) e Alta (A)\}$  para representar subjetivamente seus estados enquanto a variável *variação populacional* ( $\Delta_x$ ) terá seus estados modelados pelos termos  $\mathcal{T}_{\Delta_x} = \{Baixa Negativa (BN), Baixa Positiva (BP), Média Positiva (MP) e Alta Positiva (AP)\}$
- (ii) A taxa de variação da espécie ( $\Delta_x$ ) depende, como nos modelos tradicionais, da densidade populacional da própria espécie porém, o crescimento (ou decrescimento) desta taxa também sofrerá influência da *sazonalidade*. Explico melhor, a taxa de crescimento da espécie se modificará de acordo com o tempo (estação) em que se encontra;
- (iii) Haverá um crescimento maior nas estações mais quentes e chuvosas. Nas estações mais frias, a espécie diminui sua taxa de natalidade, chegando ao ponto de haver inclusive crescimento negativo (apenas mortalidade) com conseqüente diminuição da quantidade de indivíduos da espécie.
- (iv) As noções de frio, quente, seco e chuvoso, entre outras, são determinantes para o crescimento de muitas espécies. Neste sentido elas estarão neste modelo sendo apresentadas pela variável lingüística *Condição Ambiental* ( $\kappa$ ), cujos termos lingüísticos que as modelam serão  $\mathcal{T}_\kappa = \{Favorável (F), Pouco Favorável (PF), Desfavorável (DF)\}$ . Desta forma, a Condição Ambiental favorecerá em algum grau a taxa de crescimento da espécie em questão.
- (v) A variável  $\kappa$  dependerá do estágio do sistema interativo ( $k$ ). Isso faz sentido, conforme exposto no item (i), já que  $\kappa$  influenciará na variação  $\Delta_x$  que será variável dependendo da época do ano em que estamos nos situando.
- (vi) De acordo com condição ambiental podemos considerar que mesmo que a população chegue a zero, poderemos ter seu aumento novamente, desde que o ambiente seja favorável. Em princípio

esta hipótese pode parecer estranha, mas basta pensar que muitos tipos de pragas ficam no inverno em estado latente ou de hibernação, indicando que não há infestação por conta de um ambiente desfavorável, porém assim que as condições melhoram, esta latência desaparece, dando lugar a infestação ocorrendo novamente.

A partir de um sistema p-fuzzy unidimensional (veja Equação (2.2)) e das hipóteses acima, vamos inserir a condição ambiental no sistema. Rearranjaremos nosso esquema, com base na Figura 2.1 que descreve a arquitetura de um sistema p-fuzzy, de forma que comporte a variável  $\kappa$ . A arquitetura está representada na Figura 3.1.

Desta maneira nosso sistema terá agora duas entradas, a população ( $x$ ) e condição ambiental ( $\kappa$ ) em cada instante ( $k$ ), e uma saída, variação populacional ( $\Delta_x(x, \kappa)$ ). As funções de pertinência de cada uma das variáveis estão representadas na Figura 3.2.

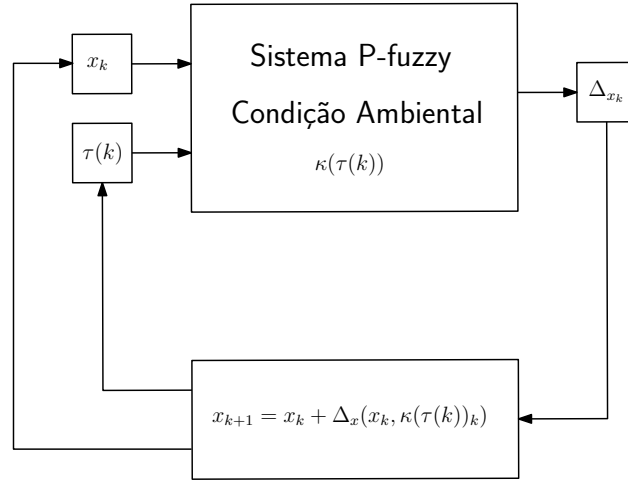


Figura 3.1.: Arquitetura do Sistema P-fuzzy unidimensional com condição ambiental

As funções de pertinência para os termos lingüísticos das variáveis  $x$  (entrada) e  $\Delta_x$  (saída) são os mesmos utilizados na Seção 2.3.3, variando apenas seus domínios, quando for o caso, conforme se vê nas Figuras 3.2(a) e 3.2(c).

As funções de pertinência que representam os termos lingüísticos da variável de entrada  $\kappa$ , conforme a Figura 3.2(b), representam as situações de favorecimento para o crescimento populacional da espécie em questão. É possível observar, através da Figura 3.2(b) que essas funções têm como domínio o conjunto  $D = [0; 180]$ , i. e. ,  $\kappa : \{1, \dots, 180\} \longrightarrow [0; 1]$ .



Conforme expusemos nas hipóteses (i) e (v),  $\kappa$  depende de  $k$ . Para nosso modelo estamos considerando um período de 180 iterações, no qual, nas primeiras 60 iterações temos  $\kappa$ , com grau de pertinência no conjunto *Favorável*. Com o passar do tempo, teremos pertinência no conjunto *Pouco Favorável* e a partir da iteração 120 teremos um ambiente desfavorável.

É claro que nosso sistema poderá ter mais do que 180 iterações. Como estaremos saindo do domínio, consideraremos um ambiente cíclico, isto é, faremos para  $\kappa$  uma iteração correspondente  $k$ , que será uma função  $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \{1, \dots, 180\}$  definida por

$$\tau(k) = \begin{cases} q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{1, \dots, 180\} \\ 180 - q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{181, \dots, 360\} \\ \vdots & \\ q \mid q \equiv k \pmod{180}, & \text{se } k \in \{N \equiv 180 \pmod{180}, \dots, K\} \end{cases} \quad (3.1)$$

em que  $k, q, N, K \in \mathbb{N}$  e  $K$  é a quantidade de iterações total desejadas para a simulação numérica.

### 3.2.2. Contruindo a Base de Regras

Para a construção da base de regras deste sistema p-fuzzy levaremos em conta as hipóteses exaradas na subseção anterior. A base é constituída de 18 regras que satisfarão a seguinte estrutura:

$$\text{“Se } x \text{ é } A_r \text{ e } \kappa \text{ é } B_r, \text{ então } \Delta_x \text{ é } C_r\text{”}.$$

em que  $A_r \in \mathcal{T}_x$ ,  $B_r \in \mathcal{T}_\kappa$  e  $C_r \in \mathcal{T}_{\Delta_x}$  e  $r \in \{1, \dots, 18\}$  representa a regra em questão. Para facilidade de notação, colocamos as 18 regras em forma de tabela (veja Tabela 3.1). Basta então verificarmos qual o termo lingüístico de cada entrada e localizarmos o termo que representa a saída. Assim, se  $x$  é Média Baixa (*MB*) e  $\kappa$  é Favorável (*F*), então a variação  $\Delta_x$  será Alta Positiva (*AP*).

Observando a base de regras da Tabela 3.1, podemos inferir que:

- Quanto mais favorável o ambiente, maior a taxa de crescimento populacional;
- Se o ambiente for favorável, independente da população, teremos sempre crescimento positivo;

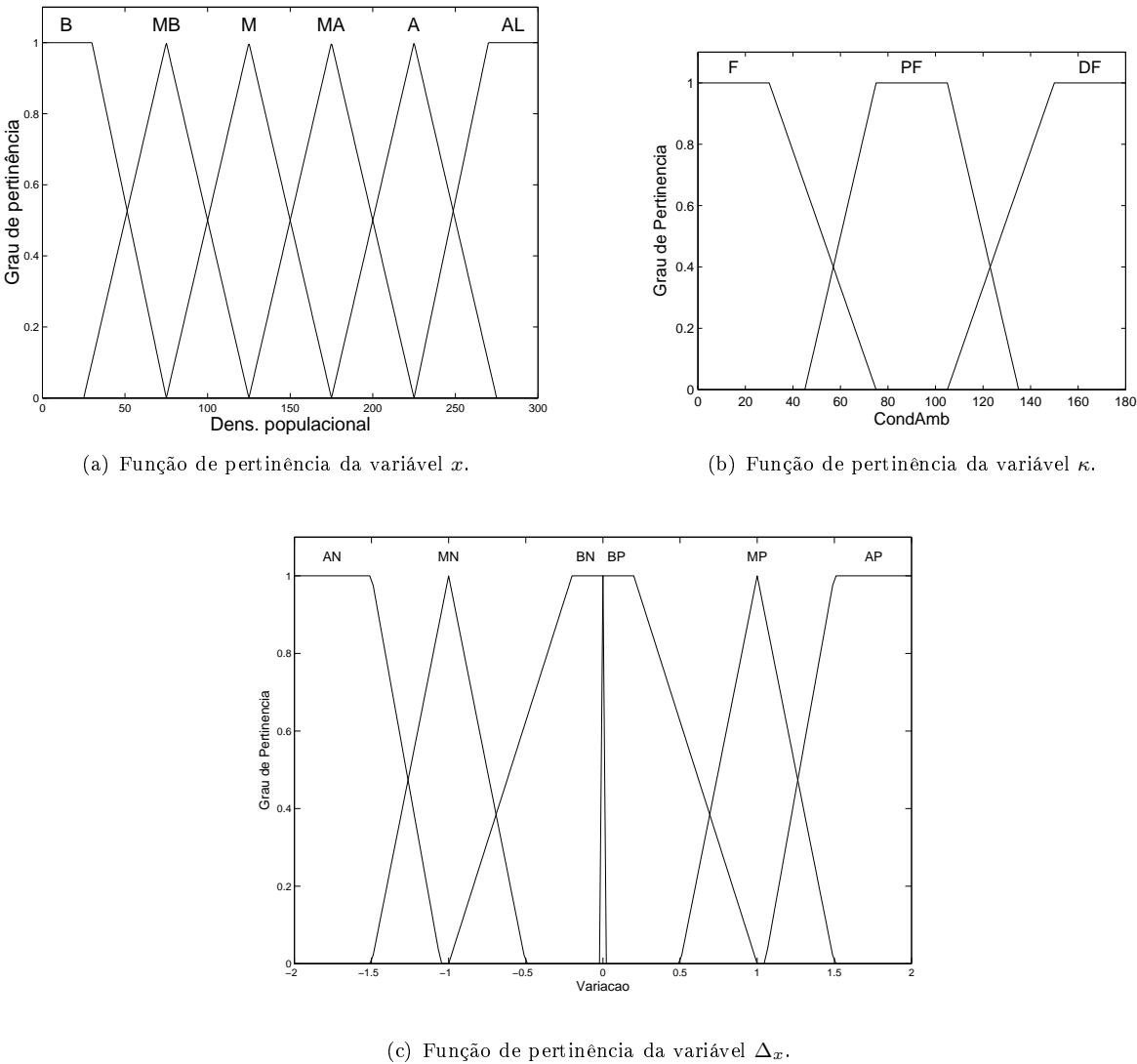


Figura 3.2.: Funções de pertinência das entradas e saídas do sistema p-fuzzy para dinâmica populacional com condição ambiental.

$x \backslash \kappa$	Favorável ( $F$ )	Pouco Favorável ( $PF$ )	Desfavorável ( $DF$ )
Baixa ( $B$ )	$MP$	$BP$	$BN$
Média Baixa ( $MB$ )	$AP$	$MP$	$BN$
Média ( $M$ )	$AP$	$AP$	$MN$
Média Alta ( $MA$ )	$AP$	$MP$	$MN$
Alta ( $A$ )	$MP$	$BP$	$AN$
Altíssima ( $AT$ )	$BN$	$MN$	$AN$

Tabela 3.1.: Base de regras para o sistema P-Fuzzy descrito na Equação (3.2)

- O ambiente desfavorável faz com que a taxa de variação da população seja negativo (mortalidade maior que natalidade);

Podemos assim, escrever o sistema p-fuzzy com condição ambiental da seguinte forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k)))_k \\ (x_0, \kappa(\tau(0)))_0 \in \mathbb{R} \times [0; 180] \end{cases}, \quad (3.2)$$

em que  $\Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k)))_k$  é dado por um SBRF e  $\tau(k)$  obedece a Equação (3.1). Observemos que nossa SBRF representa uma função  $\Delta : \mathbb{R} \times [0; 180] \longrightarrow \mathbb{R}$ . Do ponto de vista variacional, temos uma função do tipo não-autônoma, isto é, variando conforme o tempo (iteração). Além disso temos a função  $\tau$  que está implicitamente colocada mas que de fato apenas está fazendo com que o domínio de  $\kappa$  seja respeitado.

### 3.2.3. Experimentos Numéricos

Para que nosso sistema iterativo possa ser implementado, utilizaremos a *Fuzzy Logic Toolbox* do *software* Matlab® [15], que é um conjunto de funções para se lidar com modelagem Fuzzy.

Para melhor compreensão, mostramos abaixo os passos do algoritmo que foi implementado levando em conta as Equações (3.1) e (3.2) e considerando ainda:

- $x_k$  a população na iteração  $k$ ;
- $\kappa(\tau(k))$  a condição ambiental no instante  $\tau(k)$ ;
- $K$  o número final de iterações do sistema p-fuzzy;
- $k_0$  o instante inicial para a função  $\tau$ . Esta constante tem por objetivo determinar qual é a *Condição Ambiental* inicial ( $\kappa_0$ ) da simulação. Explico melhor, observando a Figura 3.2(b), veremos que para que o ambiente inicial seja por exemplo, exclusivamente *Desfavorável*, é necessário que  $k_0 \in [135; 180]$ . Ressalte-se que  $\kappa_0$  terá seu valor variado em cada experimento numérico que será realizado;

- $\tau(k)$  (Equação (3.1)) faz a transformação entre o instante da iteração e o correspondente para a condição ambiental;
- $\mathcal{F}$  função que representa o SBRF com a base de regras fuzzy da Tabela 3.1.

---

**Algoritmo 1** Passos para solução do sistema p-fuzzy unidimensional com condição ambiental.

---

**Entrada:**  $x_0, K, k_0, \tau(k_0)$

**Para**  $k$  de 1 até  $K$  **Faça**

$$\Delta_x \leftarrow \mathcal{F}(x_k, \kappa(\tau(k)_k))$$

$$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_x$$

**Fim Para**

**Saída:**  $x_K$

---

As seções abaixo mostram os resultados de nossa modelagem. Observe-se que, conforme era de se esperar, temos um ambiente cíclico, que depende não só da dinâmica populacional, mas também, e principalmente da Condição Ambiental. Ressalte-se que através das simulações, foi possível também afinar a base de regras.

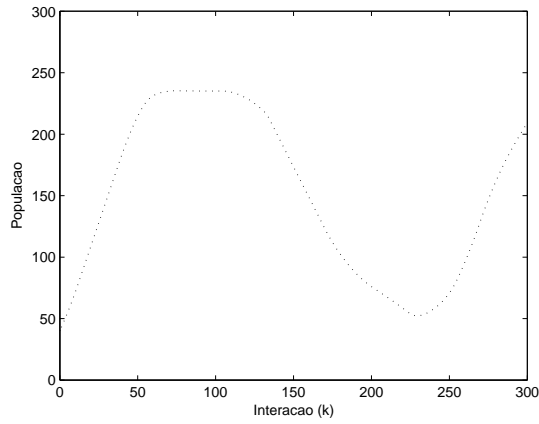
As simulações foram feitas variando-se 3 parâmetros na entrada do sistema: o ponto inicial  $x_0$ , a condição ambiental inicial  $k_0$  e a quantidade de iterações total  $K$ . Na legenda de cada figura estão exarados os valores de cada parâmetro.

### Experimentos Parte I

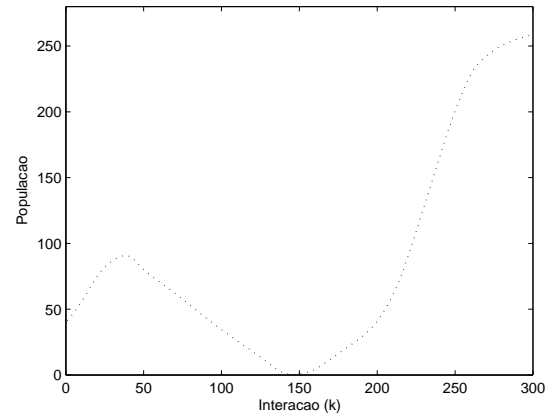
No primeiro experimento, vamos utilizar como ponto inicial  $x_0 = 40$  e  $K = 300$ , ou seja, teremos 300 iterações. Em cada um dos gráficos representados na Figura 3.3 foram feitas variações apenas na condição ambiental inicial, conforme se encontra mostrado nas legendas. Neste experimento, observa-se que, por conta da quantidade de iterações, ao final delas, o sistema estará com praticamente a mesma densidade populacional. Isso vem ao encontro da idéia de que a sazonalidade é um fator importantíssimo na determinação da variação de uma população e representa bem este fenômeno.

Além disso consegue-se verificar que em um ambiente inicial desfavorável (Figura 3.3(c)) a densidade populacional quase fica nula, porém com a mudança de estação, a população cresce nor-

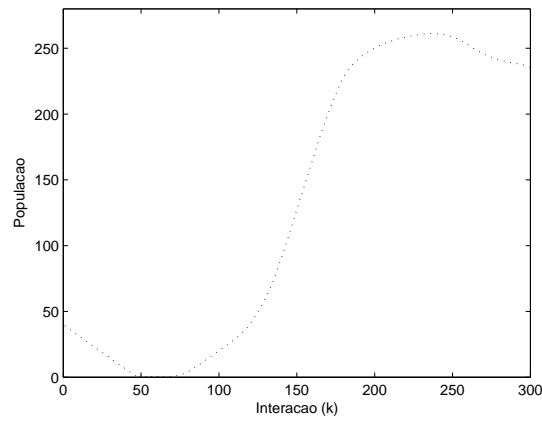
malmente.



(a)  $k_0 = 0$  ( $\kappa$  Favorável).



(b)  $k_0 = 90$  ( $\kappa$  Pouco Favorável)

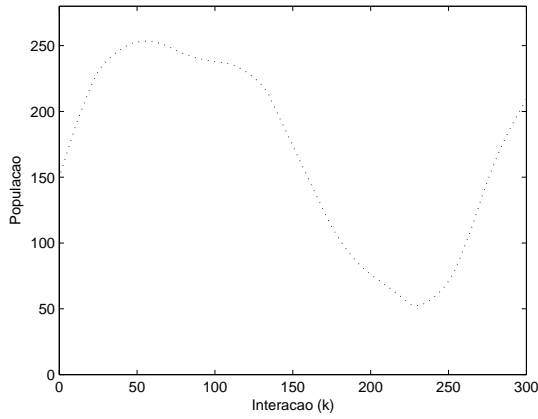


(c)  $k_0 = 170$  ( $\kappa$  Desfavorável)

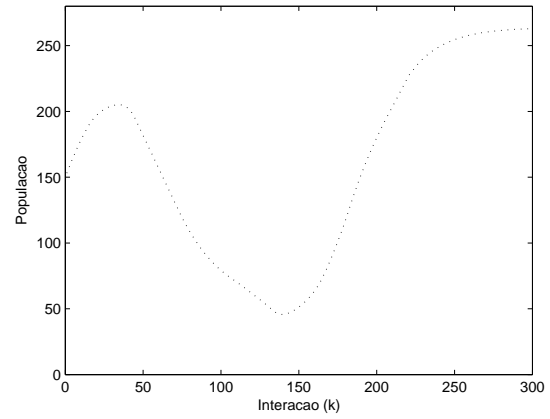
Figura 3.3.: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 40$ ,  $K = 300$  e condição ambiental variando.

### Experimentos Parte II

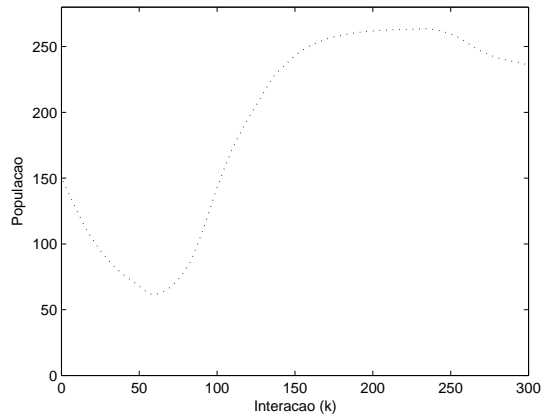
Neste segundo experimento, trocamos o ponto inicial para  $x_0 = 150$  (Figura 3.4) para  $x_0 = 250$  (Figura 3.5) e continuamos com  $K = 300$  (iterações). Novamente em cada um dos gráficos representados, foram feitas variações apenas na condição ambiental inicial. Aqui novamente a sazonalidade fica bem evidenciada e temos então um ambiente periódico como queríamos. Com a população inicial mais alta, vemos que mesmo nos períodos desfavoráveis, ainda temos uma densidade populacional considerável.



(a)  $k_0 = 0$  ( $\kappa$  Favorável).



(b)  $k_0 = 90$  ( $\kappa$  Pouco Favorável)



(c)  $k_0 = 170$  ( $\kappa$  Desfavorável)

Figura 3.4.: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 150$ ,  $K = 300$  e condição ambiental variando.

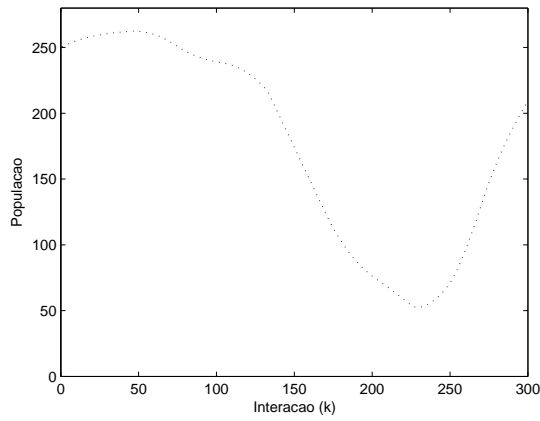
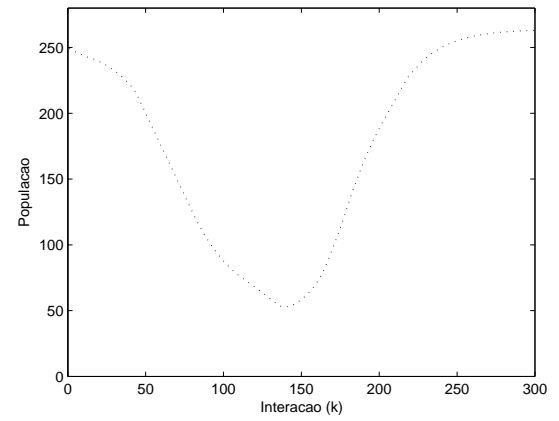
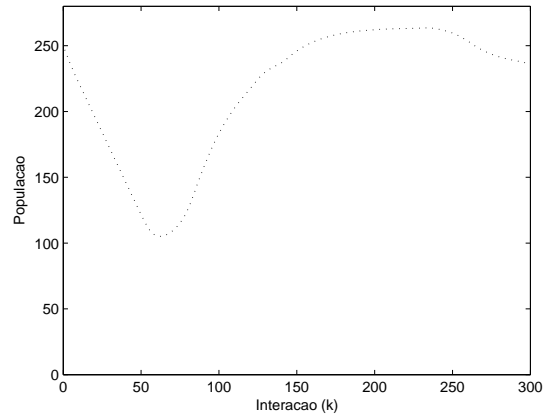
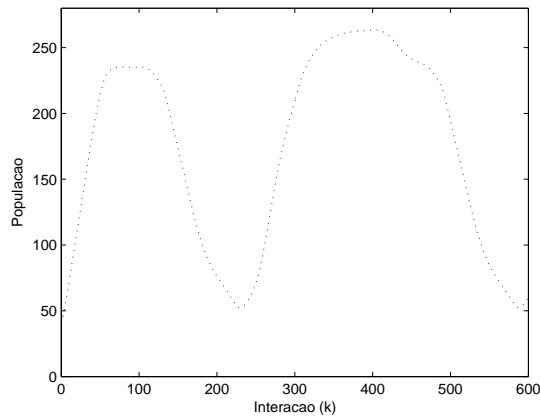
(a)  $k_0 = 0$  ( $\kappa$  Favorável).(b)  $k_0 = 90$  ( $\kappa$  Pouco Favorável)(c)  $k_0 = 170$  ( $\kappa$  Desfavorável)

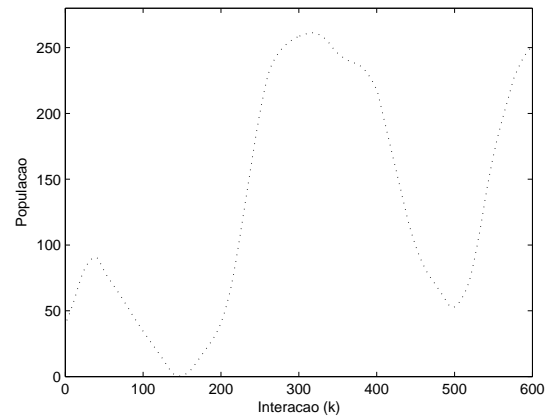
Figura 3.5.: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 250$ ,  $K = 300$  e condição ambiental variando.

### Experimentos Parte III

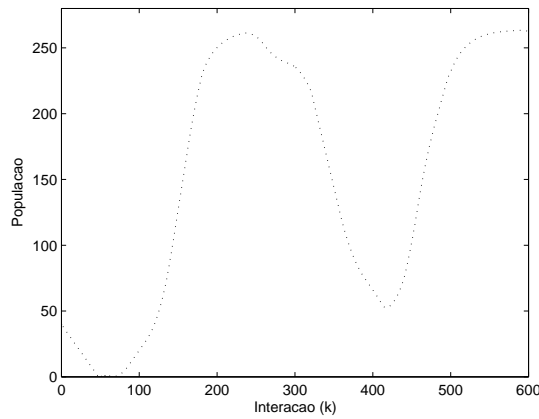
A idéia neste terceiro experimento é mostrar que com mais iterações, temos realmente uma modelagem periódica. A Figura 3.6 mostra uma periodicidade advinda da condição ambiental. Por conta disso, por exemplo, na Figura 3.6(a), temos que no final das interações a população está baixa, o que não ocorre nas outras duas simulações.



(a)  $k_0 = 0$  ( $\kappa$  Favorável).



(b)  $k_0 = 90$  ( $\kappa$  Pouco Favorável)



(c)  $k_0 = 170$  ( $\kappa$  Desfavorável)

Figura 3.6.: Soluções do sistema p-fuzzy com  $x_0 = 40$ ,  $K = 600$  e condição ambiental variando.

#### 3.2.4. Considerações sobre o Modelo Unidimensional



### 3.3. Modelo Bidimensional

O modelo bidimensional utilizando a condição ambiental será uma adaptação do modelo unidimensional anteriormente descrito. A dinâmica populacional será dada ainda por uma SBRF baseada nas equações de Kolmogorov (Seção 2.4). No entanto, teremos também a variável  $\kappa$  inserida na variação.

Assim um sistema p-fuzzy bidimensional genérico com condição ambiental pode ser descrito da da seguinte forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \Delta_x(x_k, y_k, \kappa(\tau(k))_k) \\ y_{k+1} = y_k + \Delta_y(x_k, y_k, \kappa(\tau(k))_k) \\ (x_0, y_0, \kappa(\tau(0)))_0 \in \mathbb{R}^2 \times [0; 180] \end{cases} \quad , \quad (3.3)$$

em que  $\Delta_x(x_k, \kappa(\tau(k))_k)$  e  $\Delta_y(y_k, \kappa(\tau(k))_k)$  é dado por um SBRF e  $\tau(k)$  obedece a Equação (3.1).

Observemos que nossa SBRF representa uma função  $\Delta : \mathbb{R}^2 \times [0; 180] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ . Do ponto de vista variacional, temos uma função do tipo não-autônoma, isto é, variando conforme o tempo (iteração). Além disso temos a função  $\tau$  que está implicitamente colocada mas que de fato apenas está fazendo com que o domínio de  $\kappa$  seja respeitado.

#### 3.3.1. Modelagem

Além das hipóteses do sistema p-fuzzy presa-predador apresentado anteriormente, teremos também as seguintes hipóteses, que dizem respeito a condição ambiental inserida no sistema:

- (i) Assim como nos modelos propostos no cap 2, a densidade populacional das espécies serão representada pelas variáveis *população* ( $x$ ), que utiliza-se dos termos lingüísticos  $\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y = \{Baixa (B), Média Baixa (MB) e Média Alta (MA) e Alta (A)\}$  para representar subjetivamente seus estados enquanto a variável *variação populacional* ( $\Delta_x$ ) terá seus estados modelados pelos termos  $\mathcal{T}_{\Delta_x} = \mathcal{T}_{\Delta_y} = \{Baixa Negativa (BN), Baixa Positiva (BP), Média Positiva (MP) e Alta Positiva (AP)\}$ ;
- (ii) As taxas de variação das espécie ( $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ ) dependem, como nos modelos tradicionais, da densidade populacional da própria espécie porém, o crescimento (ou decrescimento) destas

taxas também sofrerão influência da *sazonalidade*. Assim como no modelo unidimensional, as taxas de crescimento de cada espécie (presa e predador) terão modificações conforme a estação.

- (iii) Haverá um crescimento maior nas estações mais quentes e chuvosas para a presa (praga). Nas estações mais frias, esta espécie diminui sua taxa de natalidade, chegando ao ponto de haver inclusive crescimento negativo (apenas mortalidade) com conseqüente diminuição da quantidade de indivíduos da espécie. Como se trata de duas espécies diferentes, durante os experimentos numéricos teremos oportunidade de testar sazonalidades diferentes para o predador;
- (iv) As noções de frio, quente, seco e chuvoso, entre outras, serão também determinantes para o crescimento destas espécies. Neste sentido elas estarão neste modelo bidimensional sendo representadas pela variável lingüística *Condição Ambiental* ( $\kappa$ ), cujos termos lingüísticos que a modelam serão  $\mathcal{T}_\kappa = \{ \textit{Favorável} (F), \textit{Pouco Favorável} (PF), \textit{Desfavorável} (DF) \}$ . Desta forma, a Condição Ambiental favorecerá (ou desfavorecerá) em algum grau a taxa de crescimento das espécie em questão.
- (v) A variável  $\kappa$  dependerá do estágio do sistema iterativo ( $k$ ). Isso faz sentido, conforme exposto no item (i), já que  $\kappa$  influenciará na variação  $\Delta_x$  e de  $\Delta_y$ , e será variável depende da época do ano em que estamos nos situando.

Da mesma forma que no modelo unidimensional, usaremos as hipóteses de (i) à (v) para modificar o sistema p-fuzzy bidimensional (Seção 2.4) de modo a comportar a condição ambiental  $\kappa$ . A arquitetura do sistema é a mesma da Figura 3.1 porém com uma entrada e uma saída a mais, que representam  $y$  e  $\Delta_y$ . Percebe-se que o modelo agora tem como entradas as populações ( $x$  e  $y$ ), a condição ambiental  $\kappa$  e a iteração  $k$  e como saída as variações  $\Delta_x(x_k, y_k, \kappa(\tau(k))_k)$  e  $\Delta_y(x_k, y_k, \kappa(\tau(k))_k)$ .

As funções de pertinência de cada uma das variáveis de entrada ( $x, y$ ) estão representadas na Figura 3.7, e como se percebe, são as mesmas da Seção 2.4, claro que com o acréscimo da condição ambiental  $\kappa$ , cujas funções estão representadas na Figura 3.7(c). Da mesma forma que na Seção supra citada e de acordo com a arquitetura do sistema, as saídas do sistemas serão as variáveis  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  que têm suas funções de pertinência representadas na Figura 3.8.

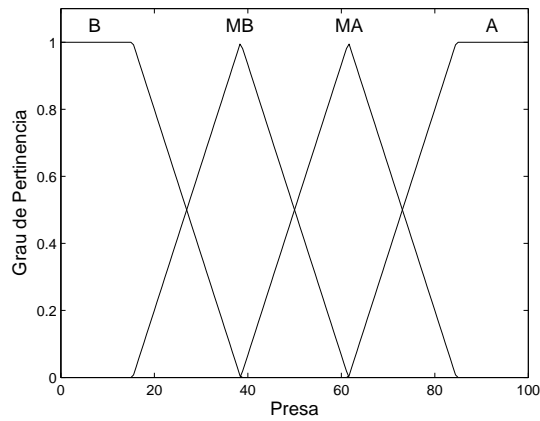
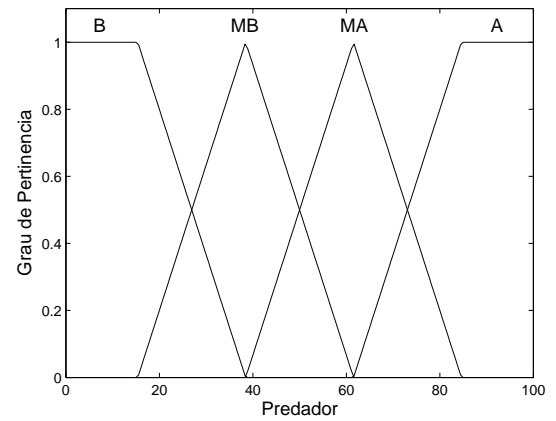
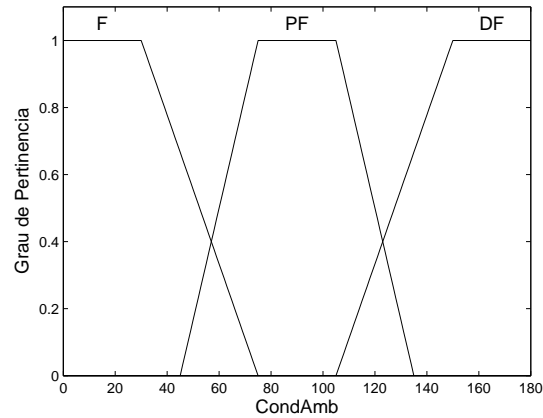
(a) Funções de pertinência da variável  $x$ .(b) Funções de pertinência da variável  $y$ .(c) Funções de pertinência da variável  $\kappa$ .

Figura 3.7.: Funções de pertinência das entradas do sistema p-fuzzy bidimensional para dinâmica populacional com condição ambiental.

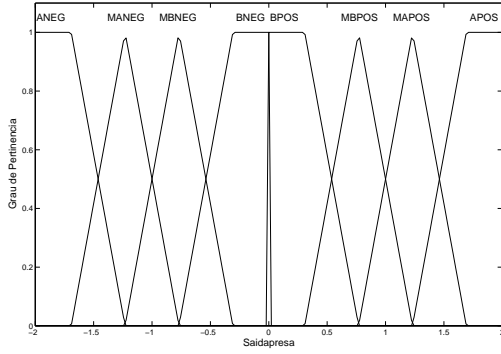
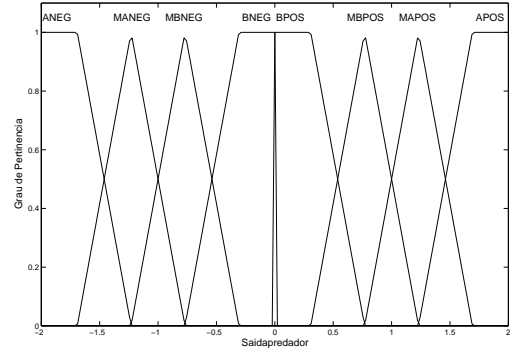
(a) Funções de pertinência da variável  $\Delta_x$ .(b) Funções de pertinência da variável  $\Delta_y$ .

Figura 3.8.: Funções de pertinência das saídas do sistema p-fuzzy bidimensional para dinâmica populacional com condição ambiental.

Assim como no caso unidimensional, os termos linguísticos da variável de entrada  $\kappa$  representam as condições de favorecimento do crescimento ambiental, porém com a diferença de que neste caso a influencia recairá sobre a variação das duas espécies e não só de uma.

Da mesma forma, de acordo com as hipóteses acima,  $\kappa$  depende de  $k$ , e também estamos considerando um período de 180 iterações. Como nosso sistema poderá ter mais de 180 iterações, vale a Equação (3.1) para  $\tau$ .

### 3.3.2. Contruindo a Base de Regras

Agora temos um sistema de 3 entradas ( $x$ ,  $y$  e  $\kappa$ ) e 2 saídas ( $\Delta_x$  e  $\Delta_y$ ). A base de regras que gerará as variações foi construída levando-se em conta as bases de regras para o sistema p-fuzzy bidimensional (veja Quadros 5 e 6 na Seção 2.4) porém, como temos a condição ambiental utilizamos as seguintes hipóteses:

- (i) Se  $\kappa$  é *Favorável*, então tanto  $\Delta_x$  quanto  $\Delta_y$  terão, em relação ao modelo bidimensional p-fuzzy, um variação aumentada.
- (ii) Se  $\kappa$  for *Pouco Favorável*, então  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  continuarão com as mesmas variações dos Quadros 5 e 6.
- (iii) No caso em que  $\kappa$  for *Desfavorável* as variações tanto  $\Delta_x$  quanto  $\Delta_y$  terão, na base regras,

valores menores ou até negativos conforme o caso.

Sucede destas hipóteses que nossa base de regras terá um total de  $48^1$  regras. O que teremos é apenas uma mudança nas variações de acordo com o ambiente ( $F$ ,  $MF$  ou  $DF$ ).

Na prática, veja por exemplo as regras  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  do Quadro 7 em que mostramos algumas regras que regem os sistema bidimensional com condição ambiental e compare com a regra  $R_1$  do Quadro 5.

Percebe-se que quando o ambiente é *Pouco Favorável* ( $PF$ ), os termos linguísticos que representam as saídas são os mesmos nos dois quadros. Quando temos ambiente *Favorável* ( $F$ ) as variações, tanto de  $\Delta_x$  quanto de  $\Delta_y$  sofrem um aumento de grau, passando de  $MBP$  para  $MAP$  e de  $MBN$  para  $BN$  respectivamente. Por outro lado, quando o ambiente é *Desfavorável* ( $DF$ ), acontece o contrário e temos uma diminuição de grau, ficando uma variação “mais fraca”. Assim  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  passam de  $MBP$  para  $BP$  e de  $MBN$  para  $MAN$  respectivamente.

$R_1$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_2$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_3$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$\vdots$	$\vdots$
$R_{16}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{17}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{18}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$\vdots$	$\vdots$
$R_{46}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{47}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{48}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BN$

Quadro 7: Algumas regras da Base de Regras para Sistema P-fuzzy presa-predador alterado a partir do Quadro 5 com condição ambiental.

<sup>1</sup>Apresentaremos todas no Anexo B.

### 3.3.3. Experimentos Numéricos

Novamente para implementarmos nosso sistema, agora bidimensional, faremos uso do *Fuzzy Logic Toolbox* do *software* Matlab®.

Novamente mostraremos em forma de algoritmo os passos implementados para resolver a equação (3.3), levando-se em conta que  $\tau$  obedecerá, como já explicado, a Equação (3.1).

Para a implementação levou-se em conta ainda que:

- $x_k$  e  $y_k$  representam a população de presas e predadores, respectivamente, na iteração  $k$ . É necessário fornecer para o programa estas populações em  $k = 0$ , i.e.,  $(x_0, y_0)$ ;
- $\kappa(\tau(k))$  a condição ambiental na interação  $k$ ;
- $K$  o número final de iterações do sistema p-fuzzy;
- $k_0$  o instante inicial para a função  $\tau$ . Esta constante tem por objetivo determinar qual é a *Condição ambiental* inicial da simulação;
- $\tau(k)$  (Equação (3.1)) faz a transformação entre o instante da iteração e o correspondente para a condição ambiental;
- $\mathcal{F}$  função que representa o SBRF com a base de regras fuzzy. Essa base está como entrada do sistema, pois poderemos ter mudanças na mesma, dependendo do tipo de interação que estaremos usando. Isso por que, usaremos as hipóteses conforme descrito nas seções anteriores. Os valores  $\mathcal{F}_x$  e  $\mathcal{F}_y$  representam as componentes das presas e predadores de cada

---

**Algoritmo 2** Passos para solução do sistema p-fuzzy bidimensional com condição ambiental.

---

**Entrada:**  $(x_0, y_0), K, k_0, \mathcal{F}$

Calcule  $\tau(k_0)$

**Para**  $k$  de 1 até  $K$  **Faça**

Calcule  $\tau(k)$

$\Delta_x \leftarrow \mathcal{F}_x(x_k, y_k, \kappa(\tau(k)))_k$

$\Delta_y \leftarrow \mathcal{F}_y(x_k, y_k, \kappa(\tau(k)))_k$

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_x$

$y_{k+1} \leftarrow y_k + \Delta_y$

**Fim Para**

**Saída:**  $x_K, y_K$

---

Na sequência mostaremos as simulações feitas usando um sistema bidimensional, com base de regras do tipo presa-predador adaptada para comportar a variável condição ambiental.

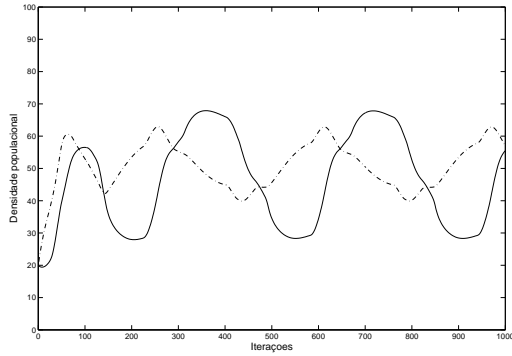
### Experimentos Parte I

Neste experimento, utilizaremos da base de regras do Quadro 7, que é baseada no modelo com equilíbrio assintoticamente estável exposto na Seção 2.4.

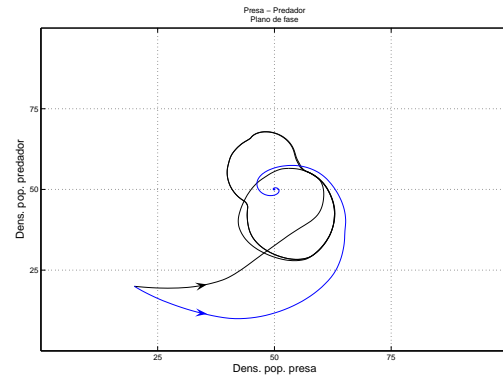
Os resultados numéricos mostram que comparativamente, a inserção da condição ambiental faz com que saíamos de um ponto de equilíbrio único e tenhamos “ciclo limite”, já que nossa intenção era de fato fazer com que tenhamos uma periodicidade.

As simulações abaixo mostram variações de pontos iniciais para a população bem como variação de  $k_0$  que determina a condição ambiental inicial da simulação. Para efeito de comparação, e para ressaltar a mudança comentada no parágrafo anterior, ao apresentar o plano de fase das simulações foi inserido o esboço do plano de fase para a base de regras sem a condição ambiental.

A Figura 3.10 mostra a solução e o plano de fase para esta base, porém com condição ambiental inicial *Pouco Favorável*. Conforme dissemos, nesta condição, repetem-se os estados das variáveis, como se não houvesse condição ambiental. De fato, o plano de fase mostra esta característica, até que, por conta da mudança temporal, muda-se a condição ambiental e logo, as linhas se separam.



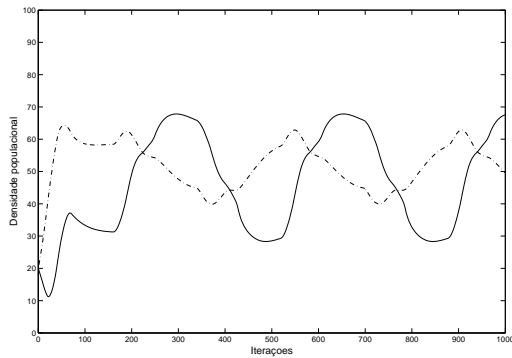
(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.



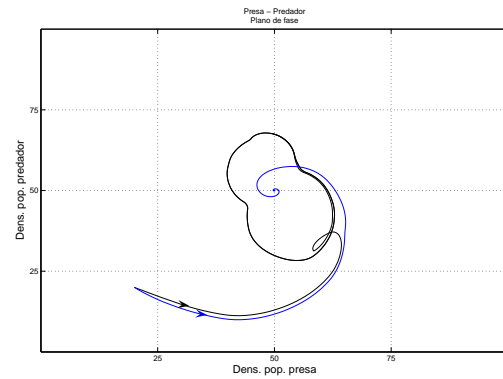
(b) Plano de fase. Em azul o esboço do plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.

Figura 3.9.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (20, 20)$ , e condição ambiental inicial *Favorável* ( $k_0 = 0$ ).

Observando as soluções, percebe-se ao se comparar as Figuras 3.9(a) e 3.10(a) que mesmo com o ambiente pouco favorável para as duas espécies, a densidade populacional das presas ( $x$ ) acaba crescendo mais pois há um decréscimo acentuado da população de predadores facilitando o aumento populacional. Obviamente que isso leva a um posterior aumento de predadores e diminuição de presas entrando em “equilíbrio”. Aqui o termo equilíbrio está entre aspas pois ele foi constatado apenas numericamente. Um estudo posterior, e que foge ao escopo deste trabalho, pode indicar condições para que este



(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.



(b) Plano de fase. Em azul plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.

Figura 3.10.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (20, 20)$ , e condição ambiental inicial *Pouco Favorável* ( $k_0 = 60$ ).



Outra simulação foi feita com o mesmo ponto inicial  $(x_0, y_0) = (20, 20)$  porém com ambiente inicial *Desfavorável* ( $k_0 = 130$ ). Esta simulação fez com que a população de predadores logo chegasse a zero, o que fez com que o sistema parasse, já que devemos ter  $x, y > 0$ . O plano de fase desta simulação é mostrado na Figura 3.11.

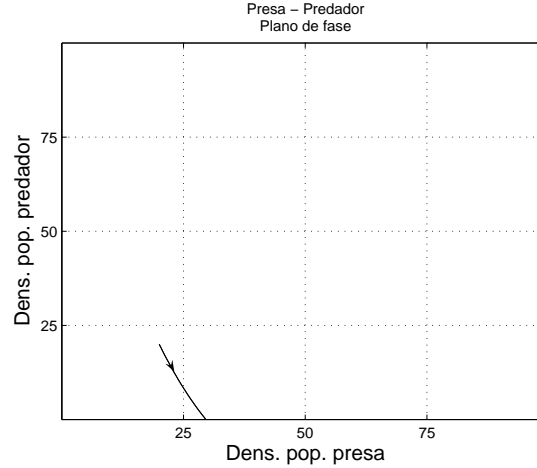


Figura 3.11.: Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (20, 20)$ , e condição ambiental inicial *Desfavorável* ( $k_0 = 130$ ).

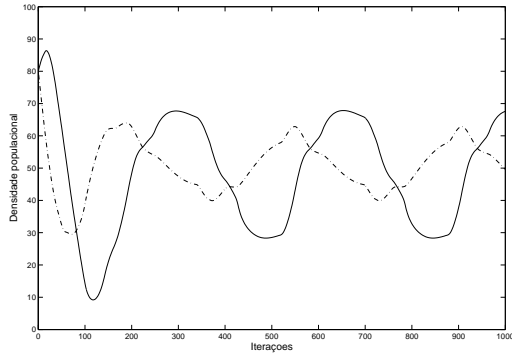
As Figuras 3.12, 3.13 e 3.14 mostram agora simulação com ponto inicial  $(x_0, y_0) = (80, 80)$  e a condição ambiental inicial variando. Note-se (Figura 3.14) que quando a condição ambiental é favorável neste ponto inicial, temos valores para  $y$  maiores que 100, saindo de nossa faixa de simulação.

## Experimentos Parte II

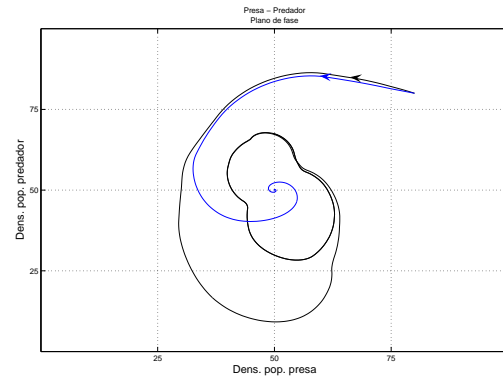
Nosso objetivo agora é utilizar as mesmas idéias já expostas, para construir uma base de regras com condição ambiental que leve em conta um modelo de interação entre espécies que já tenha como solução um ciclo limite, conforme foi dito na Seção 2.4.

Para isso utilizaremos os mesmos princípios instituídos na Subsecção 3.3.2, em que estabelecemos o modo pelo qual construiríamos a base de regras porém agora modificando a base de regras do Quadro 6. A base também terá 48 e não será aqui exposta, pois está colocada no Anexo B.

Nestes experimentos, não serão colocadas os planos de fase para o sistema sem condições ambientais para facilitar a observação do que acontece quando utilizamos a base de regras que

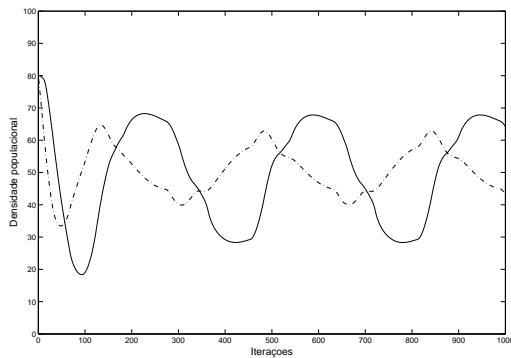


(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.

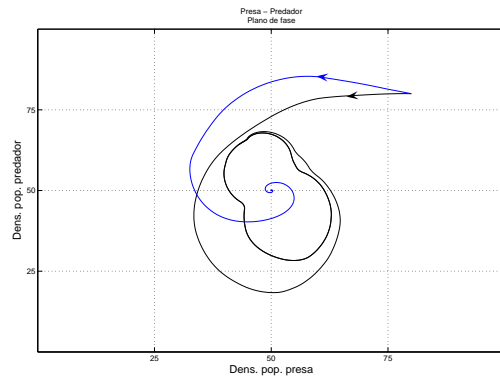


(b) Plano de fase. Em azul plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.

Figura 3.12.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (80, 80)$ , e condição ambiental inicial *Pouco Favorável* ( $k_0 = 65$ ). Em azul plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.



(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.



(b) Plano de fase. Em azul plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.

Figura 3.13.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (80, 80)$ , e condição ambiental inicial *Desfavorável* ( $k_0 = 130$ ).

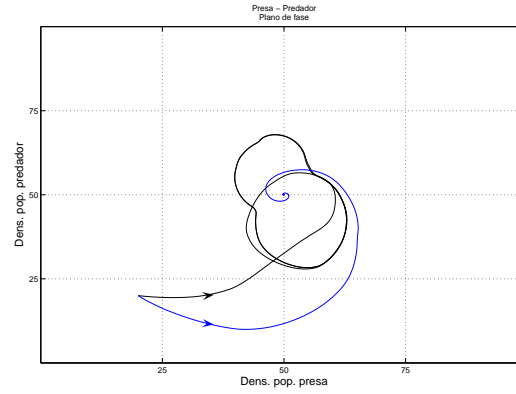
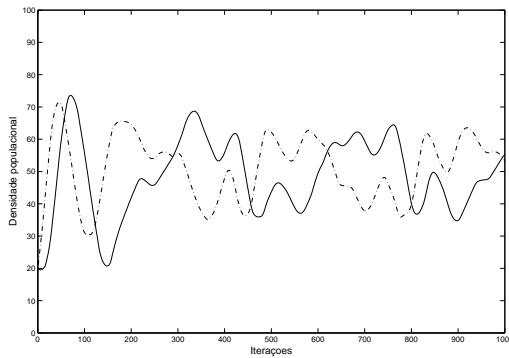


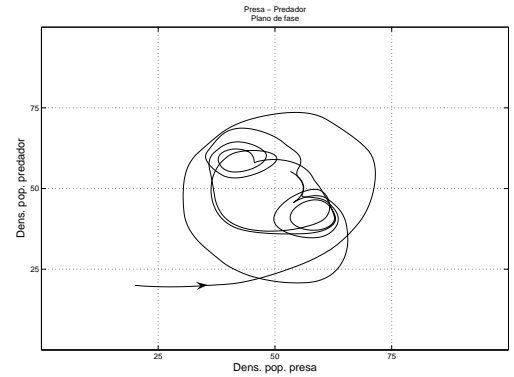
Figura 3.14.: Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (80, 80)$ , e condição ambiental inicial *Desfavorável* ( $k_0 = 0$ ). Em azul plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.

contempla mudanças nas condições ambientais.

Observa-se na Figura 3.15, em que temos ambiente inicial *Favorável*, que, como estamos modificando a base de regras que já continha um ciclo limite em torno de um ponto instável, continuamos a ter solução periódica, porém o plano de fase nos mostra dois pequenos “ciclos limites” (novamente entre aspas, pois estamos falando de simulações), que aparecem justamente quando muda a condição ambiental (e o tempo). As soluções apresentadas neste caso, mostram que os períodos ainda ocorrem, porém, com oscilações dentro de cada período, oscilações estas também periódicas e que se repetem em cada período.



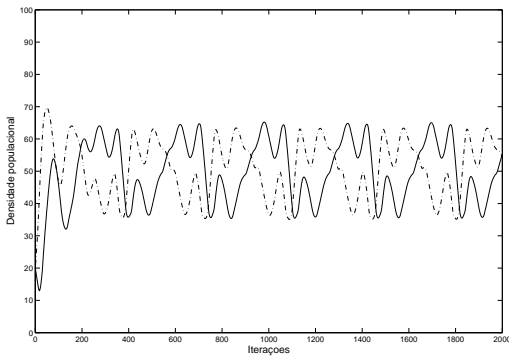
(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.



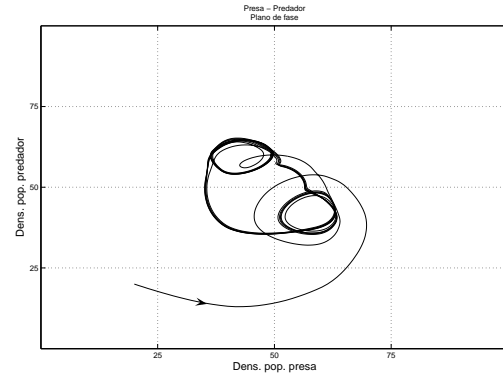
(b) Plano de fase.

Figura 3.15.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (20, 20)$ , e condição ambiental inicial *Favorável* ( $k_0 = 0$ ) e  $K = 1000$  iterações.

A Figura 3.16 mostra a simulação feita com mesmo ponto inicial da anterior  $(20, 20)$ , porém agora com condição ambiental *Pouco Favorável*. Aumentamos o número de iterações para caracterizar bem a periodicidade e os “ciclos limites”, que de fato se tornaram pronunciados. As soluções apresentadas continuam com o mesmo tipo comportamento da simulação anterior.



(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.



(b) Plano de fase.

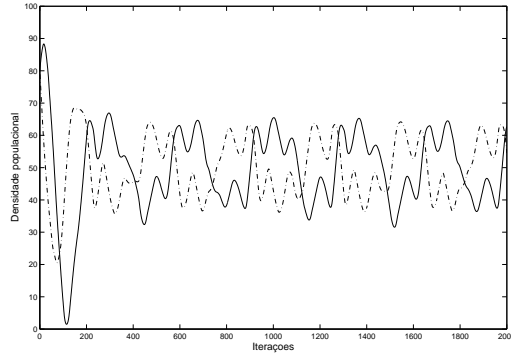
Figura 3.16.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (20, 20)$ , e condição ambiental inicial *Pouco Favorável* ( $k_0 = 65$ ) e  $K = 2000$  iterações.

Ao fazermos a simulação com ponto inicial  $(20, 20)$  e condição ambiental inicial *Desfavorável* ( $k_0 = 130$ ) ocorreu o mesmo fenômeno dos experimentos feitos na parte I, quando o ponto inicial era “baixo” e o ambiente desfavorável, uma extinção da população de predadores.

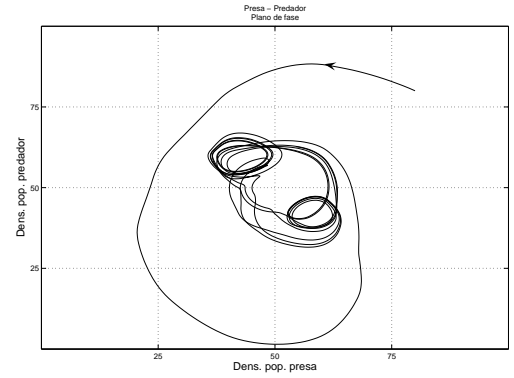
Nas ultimas simulações desta parte de experimentos utilizamos do ponto inicial  $(80, 80)$ , e modificaremos as condições ambientais iniciais  $k_0 = 65$  e  $k_0 = 130$ . Verificou-se, como se observa nas Figuras 3.17 e 3.18, que ainda continuamos com o mesmo tipo de característica, evidenciando-se dois “ciclos” limites que se alternam conforme o tempo (interação) passa (ocorrem). No caso em que colocamos como condição ambiental inicial um ambiente *Favorável* ( $k_0 = 0$ ), tivemos, uma explosão de predadores, e a simulação foi parada.

### 3.4. Conclusão

Neste capítulo mostramos que é possível utilizar uma SBRF para modelar o comportamento da densidade populacional de uma espécie ou de duas espécies interagindo quando se levar em

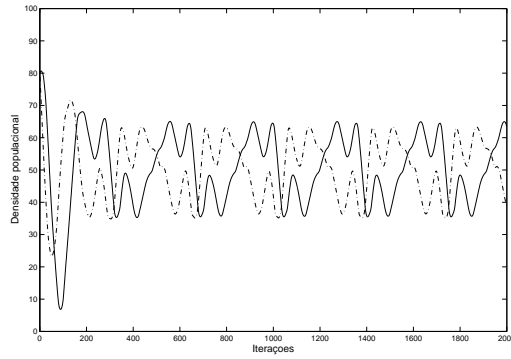


(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.

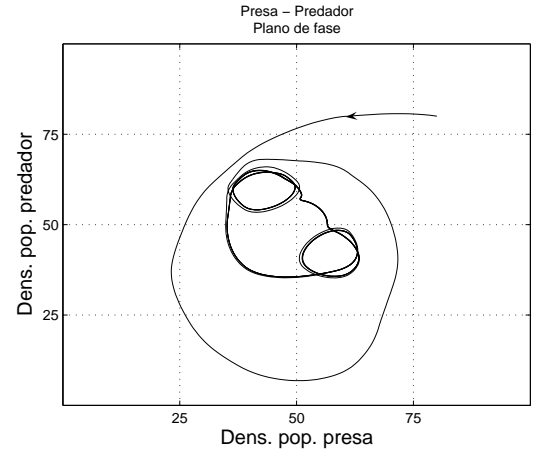


(b) Plano de fase. Em azul plano de fase para as mesmas regras, sem condição ambiental.

Figura 3.17.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (80, 80)$ , e condição ambiental inicial *Pouco Favorável* ( $k_0 = 65$ ) e  $K = 2000$  iterações.



(a) Solução mostrando densidade populacional de  $x$  (linha pontilhada) e  $y$  (linha contínua) ao longo tempo.



(b) Plano de fase.

Figura 3.18.: Solução e Plano de Fase do sistema p-fuzzy bidimensional com  $(x_0, y_0) = (80, 80)$ , e condição ambiental inicial *Pouco Favorável* ( $k_0 = 130$ ) e  $K = 2000$  iterações.

conta as mudanças das condições ambientais que ocorrem quando se quer levar em conta o tempo como fator determinante da variação populacional desta(s) espécie(s).

## Capítulo 4.

# Controle de Pragas utilizando um SBRF

### 4.1. Motivação

Um país como o Brasil, com tantas peculiaridades e pluralidade climáticas e geográficas, abriga uma diversidade enorme de insetos e plantas. Além das espécies nativas e cultivadas para fins comerciais, tanto para consumo interno como para exportação, historicamente muitas espécies vegetais foram introduzidas por colonizadores e imigrantes, sendo responsáveis pela introdução de espécies exóticas de predadores fitófagos.

Quando surge a praga em alguma lavoura, os agricultores têm se utilizado de inseticidas eficientes ao maior número de espécies e isso tem sido a tônica dos últimos 30 anos no Brasil, principalmente após o advento dos defensivos organossintéticos. Atualmente, o controle de pragas é feito com o uso de inseticidas cujos efeitos colaterais, tais como a contaminação de alimentos, de mananciais, do homem, do ar e do solo, são conhecidos. A ressurgência de pragas num curto período após a aplicação do defensivo é um problema comum, e ocorre devido ao vácuo biótico ocasionado pelo uso do inseticida. A praga retorna livre de seus inimigos naturais, podendo desenvolver grandes populações [6].

Inseticidas são “substâncias químicas utilizadas para matar, atrair e repelir insetos, sendo sua descoberta, isolamento, síntese, avaliação toxicológica e de impacto ambiental um vasto tópico de pesquisas no mundo inteiro e que tem se desenvolvido bastante nas últimas décadas” [26]. O uso de inseticidas consome, mundialmente, valores da ordem de bilhões de dólares na tentativa de controlar

pragas em geral, em particular na agricultura, mas também na erradicação de doenças como a dengue, entre outras.

Especificamente, por exemplo, verificamos que alguns tipos de pulgões são os principais vetores na disseminação das doenças das plantas perenes. Recentemente, uma doença denominada “morte súbita”, causada por vírus transportados por pulgões, tem sido a grande ameaça dos laranjais paulistas [21]. Outros tipos de insetos, como a mariposa oriental (*Grapholita molesta*) que é praga chave na cultura de pêssegos [14] ou ainda a lagarta-enroladeira (*Bonagota cranaodes meyrick*) na macieira [5], entre outros são característicos das plantas brasileiras e são quase que totalmente combatidos com o uso de biocidas.

O controle destas doenças é baseado, sobretudo, no controle químico com aplicações intermitentes de biocidas quase sempre sem levar em conta a infestação da praga. Neste sentido, o uso é indiscriminado, afetando sobremaneira o meio-ambiente. Neste capítulo proporemos um modelo para controlar uma determinada praga sem especificá-la.

Apesar de ser um modelo teórico, ele tenta caracterizar de uma melhor forma a intensidade de utilização através de um modelo que baseado em uma SBRF.

## 4.2. Modelo Unidimensional

A SBRF estudada no capítulo 1 será entendida nesta seção como uma função  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  em que adotamos como variáveis de entrada a densidade da espécie  $x$  a ser controlada (densidade de infestação por exemplo) e a variação desta densidade  $\Delta_x$ . A saída será justamente a intensidade do biocida dada em porcentagem de mortalidade (*kill rate*). Esta mortalidade representa a porcentagem da infestação que o biocida consegue eliminar.

O uso de sistemas especialista (principalmente de controle) é bastante utilizado nas indústrias em geral. Em especial, o uso de controladores fuzzy tem sido largamente empregado, até por que foi este o motivador de Mamdani para a sua construção [20, 27]

Nos modelos clássicos a variação é dada por um sistema de equações diferenciais ou de diferenças. Nesse caso, faremos uso dos dois capítulos anteriores e utilizaremos sistemas p-fuzzy para determinar a variação em cada iteração.



No caso específico do modelo com condição ambiental teremos uma época do ano que é mais ou menos propícia para crescimento populacional. Por exemplo sabe-se que os pulgões proliferam mais na época das chuvas quando as plantas têm novos brotos [6]. Por isso também faremos uso do modelo com condição ambiental, descrito no capítulo 3.

#### 4.2.1. Modelagem

O modelo de controle será construído acoplado aos modelos de densidade populacional p-fuzzy vistos anteriormente. Desta forma, com base na Equação 2.2, podemos reescrevê-la, agora com a inserção da variável  $\mathcal{C}$ , resultando no sistema p-fuzzy descrito na equação:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (x_k + \Delta_x(x_k)) \times (1 - \mathcal{C}(x_k, \Delta_x)) \\ x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (4.1)$$

em que  $\Delta_x(x_k)$  e  $\mathcal{C}(x_k, \Delta_x)$  são dados por um SBRF. O valor  $(1 - \mathcal{C}(x_k, \Delta_x)) \in [0; 1]$  representa a porcentagem de população que sobrar após a aplicação do biocida.

A arquitetura do sistema poderá ser vista na Figura 4.1 que contempla também a SBRF que nos dá a variação.

Como dissemos, usaremos uma SBRF para determinar o total de biocida a ser aplicado. A base de regras para o controle foi construída seguindo seguintes pressupostos:

- (i) As variáveis de entrada  $x$  e  $\Delta_x$  terão termos linguísticos  $\mathcal{T}_x = \{Baixa (B), Média Baixa (MB), Média (M), Média Alta (MA), Alta (A), e Altíssima (AT)\}$ . Da mesma forma os termos linguísticos  $\mathcal{T}_{\Delta(x)} = \{Baixa Negativa (BN), Baixa Positiva (BP), Média Positiva (MP) e Alta Positiva (AP)\}$  representarão os estados assumidos pela variável *variação*. As funções de pertinência estão ilustradas na Figura 2.5 e são as mesmas da Seção 2.3.3.
- (ii) Para a variável de saída  $\mathcal{C}$  que representará subjetivamente os estados de Controle do sistema, os termos linguísticos serão  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \{Nulo (\mathcal{C}_0), Baixo (\mathcal{C}_B), Médio (\mathcal{C}_M), e Alto (\mathcal{C}_A)\}$ . As funções de pertinência para esta variável estão representadas na Figura 4.2. Note-se que nosso biocida, em cada aplicação pode matar até 90% da densidade populacional presente no instante da aplicação.

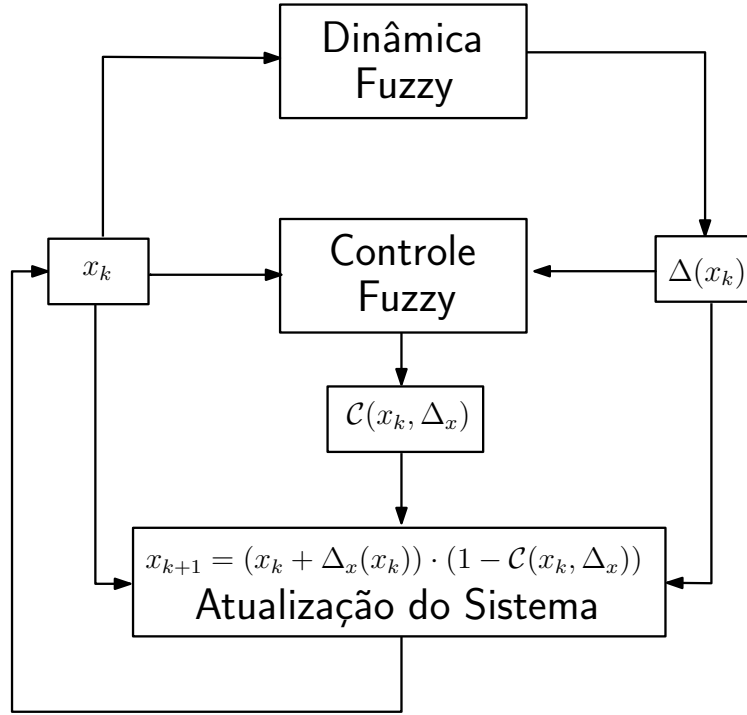


Figura 4.1.: Arquitetura do sistema p-fuzzy unidimensional com controle da densidade populacional através de biocida.

(iii) Como as entradas da SBRF são  $x$  e  $\Delta_x$ , as regras foram feitas de modo que se tivermos população em níveis baixos, mas com variação mais alta, então deve-se aplicar mais veneno do que se a variação fosse mais baixa. Claro que nos modelos tradicionais a variação sempre depende da densidade populacional, porém no modelo com condição ambiental, temos um fator externo a população determinando sua variação e neste caso este tipo de regra fará mais sentido.

(iv) Por conta da quantidade de estados de entrada (6 para  $x$  e 4 para  $\Delta_x$ ) temos um total de 24 regras. A Tabela 4.1 mostra as regras utilizadas. Por exemplo se densidade populacional ( $x$ ) for Média Alta ( $MA$ ) e variação ( $\Delta_x$ ) for Média Positiva ( $MP$ ) então o taxa mortalidade será Média ( $\mathcal{C}_M$ ) com valor real dado pela SBRF através de um controlador de Mamdani com defuzzificação por centro de massa.

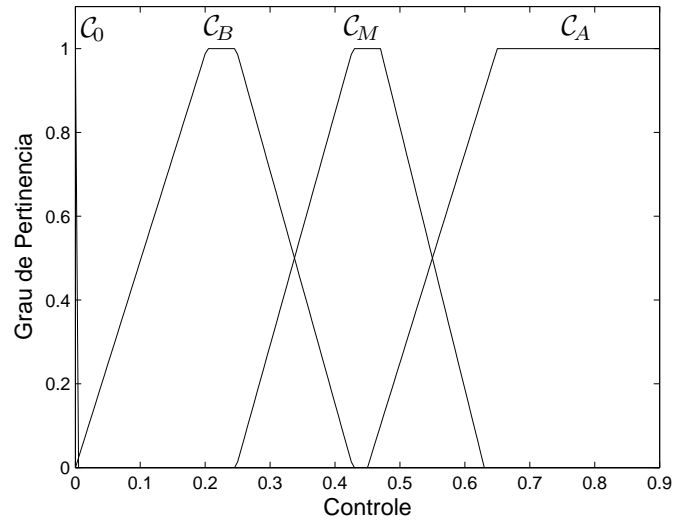


Figura 4.2.: Funções de pertinência para saída para a SBRF que determina a quantidade de biocida a ser aplicada  $\mathcal{C}$ .

$x \backslash \Delta_x$	Baixa Negativa ( $BN$ )	Baixa Positiva ( $BP$ )	Médio Positiva ( $MP$ )	Alta Positiva ( $AP$ )
Baixa ( $B$ )	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_B$
Média Baixa ( $MB$ )	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_B$	$\mathcal{C}_M$
Média ( $M$ )	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_B$	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_M$
Média Alta ( $MA$ )	$\mathcal{C}_B$	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_A$
Alta ( $A$ )	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$
Altíssima ( $AT$ )	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$

Tabela 4.1.: Base de regras para a SBRF que determina a quantidade de biocida a ser aplicada  $\mathcal{C}$ .

#### 4.2.2. Experimentos Numéricos

Dada a modelagem do SBRF agora devemos fazer experimentações numéricas para percebermos como se comporta este modelo. Novamente utilizaremos Matlab® e sua *Fuzzy Logic Toolbox*.

Temos agora que acoplar a um sistema p-fuzzy unidimensional o controle de acordo com a Figura 4.1.

Mostramos abaixo os passos do algoritmo que foi implementado levando em conta a Equações (4.1) e considerando ainda:

- $x_k$  a população na iteração  $k$ ;
- $\Delta_x(x_k)$  como a variação populacional dada por um SBRF;
- $\mathcal{C}(x_k, \Delta_x(x_k))$  o controle a ser aplicado na iteração  $k$ ;
- $K$  o número total de iterações do sistema p-fuzzy;
- $\alpha$  o período de aplicação do biocida. Este parâmetro corresponde ao período de intermitência entre as aplicações do veneno nas população.
- $\mathcal{F}$  função que representa o SBRF com a base de regras fuzzy para densidade populacional, neste caso unidimensional. Utilizaremos tanto o sistema p-fuzzy com crescimento inibido do tipo logístico (Seção 2.3.3) quanto crescimento determinado por condição ambiental (Seção 3.2).
- $\mathcal{F}_C$  representa a SBRF que determina o controle, composta das regras da Tabela 4.1.

O Algoritmo 3 nos dá a maneira pela qual fizemos os experimentos. Note que para fazermos a periodicidade da aplicação encontramos o resto da divisão de  $k - 1$  por  $\alpha$  que nos dá sempre valores entre 0 e  $(\alpha - 1)$ . Quando  $j = 0$ , então a aplicação é feita, caso contrário atualização de  $x_k$  é feita normalmente.

Leve-se em consideração que quando  $\mathcal{F}$  requisitar outras variáveis de entrada, como por exemplo quando estamos trabalhando com condição ambiental, fizemos os ajustes necessários para o experimento finalizar.

---

**Algoritmo 3** Passos para solução do sistema p-fuzzy unidimensional com controle químico da densidade populacional.

---

**Entrada:**  $x_0, K, k_0, \alpha$

**Para**  $k$  de 1 até  $K$  **Faça**

$j \leftarrow (k - 1) \bmod \alpha$

**Se**  $j = 0$  **Então**

$\Delta_x \leftarrow \mathcal{F}(x_k)$

$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x_k, \Delta_x)$

$x_{k+1} \leftarrow (x_k + \Delta_x) \times (1 - \mathcal{C})$

**Senão**

$\Delta_x \leftarrow \mathcal{F}(x_k)$

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_x$

**Fim Se**

**Fim Para**

**Saída:**  $x_K$

---

### Experimentos Parte I

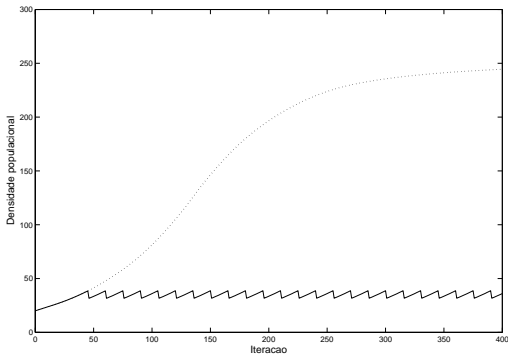
Nestes primeiros experimento, utilizaremos de um sistema p-fuzzy com variação dada por um sistema p-fuzzy com crescimento inibido, dado pela base de regras do Quadro 4.

Na Figura 4.3 temos a solução do sistema p-fuzzy controlado com aplicação  $\alpha$  a cada 15 iterações e as populações iniciais variando e total de iterações  $K = 400$ .

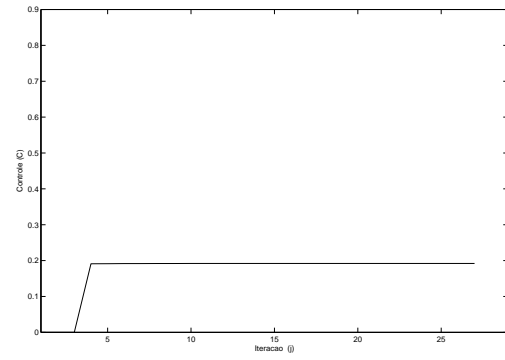
Observando a solução dada pela Figura 4.3(a) temos, no início uma população *Baixa* e logo o sistema de controle não foi acionado (Figura 4.3(b)). Após algumas iterações, o SBRF aciona o controle e mantém a densidade populacional em um nível abaixo do valor 40.

Já a solução para  $x_0 = 190$  dada na Figura 4.3(c) e o quantidade de biocia a ser utilizado dada na Figura 4.3(d) mostra que como a população inicial estava entre *Média Alta* e *Alta*, o controle acionado foi maior e logo consegue manter a população ainda em um patamar menor que 40. Para finalizar também fizemos uma simulação com população inicial acima da capacidade de suporte e os resultados (veja Figuras 4.3(e) e 4.3(f)) foram parecidos para a população controlada.

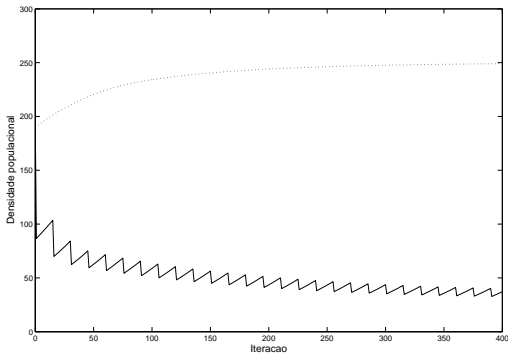
Destas simulações resulta que a aplicação a cada 15 iterações o SBRF de controle mantém a população, independente da condição inicial, no patamar de 40. Se quiséssemos uma população final abaixo deste patamar, apenas precisaríamos ajustar as funções de pertinência de saída de



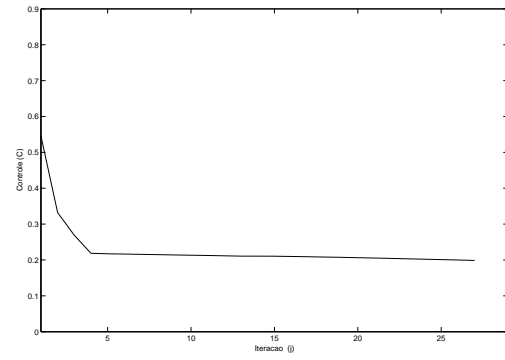
(a) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 20$ .



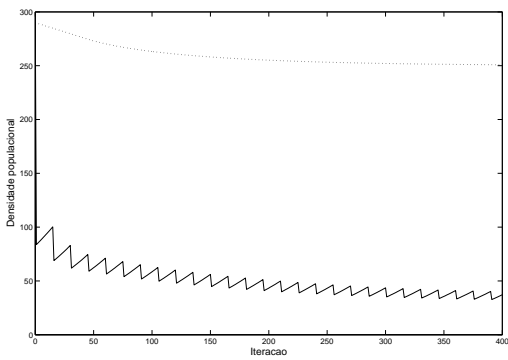
(b) Aplicação de biocida com  $x_0 = 20$ .



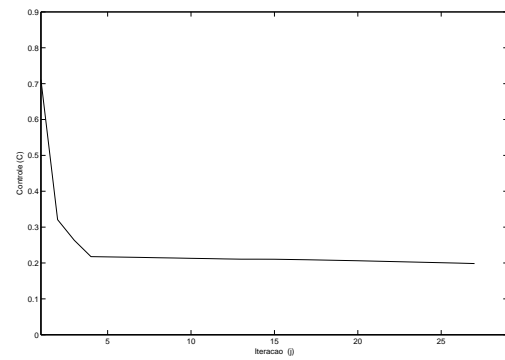
(c) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 190$ .



(d) Aplicação de biocida com  $x_0 = 190$ .



(e) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 290$ .



(f) Aplicação de biocida com  $x_0 = 290$ .

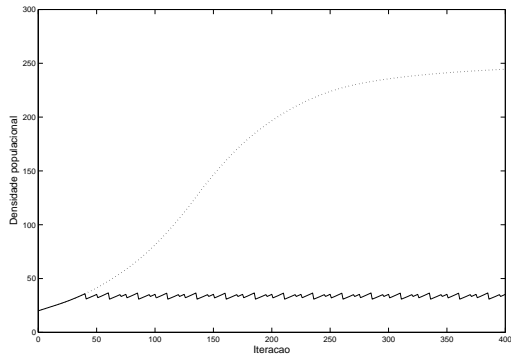
Figura 4.3.: Soluções e biocida utilizado para o sistema p-fuzzy controlado com aplicação  $\alpha = 15$ ,  $K = 400$  e condição inicial variando.

modo a modelar o aumento da capacidade do biocida. Poderíamos também, diminuir o intervalo de aplicações. É o que faremos em seguida.

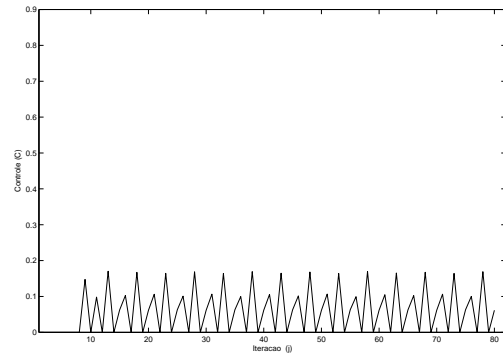
De fato, a Figura 4.4 mostra as soluções para o sistema, com aplicação  $\alpha = 5$ . Isso significa que estamos usando veneno em períodos menores. Isso faz com que a densidade populacional fique agora em patamares abaixo de 37. Veremos que, por conta disso, não há muita diferença na densidade populacional com a diminuição do período de aplicação. Observamos ainda que, com o passar das iterações, a quantidade de biocida aplicada está variando, porém periodicamente (veja as Figuras 4.4(b), 4.4(d) e 4.4(f)). Isso se deve ao fato de a densidade populacional e a variação ativarem regras diferentes em cada instante e quando o SBRF vai aplicar o veneno ele muda a quantidade necessária. Isso também era esperado já que estamos aplicando em períodos menores.

A Figura 4.5 mostra agora as simulações feitas com  $\alpha = 30$  e para termos uma melhor visualização, utilizamos  $K = 600$ . Aqui vemos que o patamar de densidade populacional 40 foi ultrapassado chegando a níveis de até 100. Portanto a infestação aqui é maior, pois que controlada em períodos menores. Interessante notar que quando  $z_0 = 20$  (Figura 4.5(a)), por conta da densidade ser menor no início, o controle nas 30 primeiras iterações ficou nulo. De fato passaram-se apenas 2 períodos de possível aplicação já que temos controle a cada 30 dias.

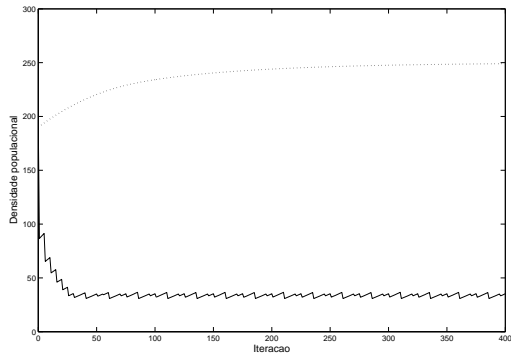
As simulações numéricas que fizemos com este modelo mostaram que entre 15 e 17 aplicações ainda conseguimos manter a população abaixo do patamar de 40 e que a diferença diminuindo estes períodos não foi considerável. A partir daí o patamar vai aumentando cada vez mais, aumentando a infestação da praga.



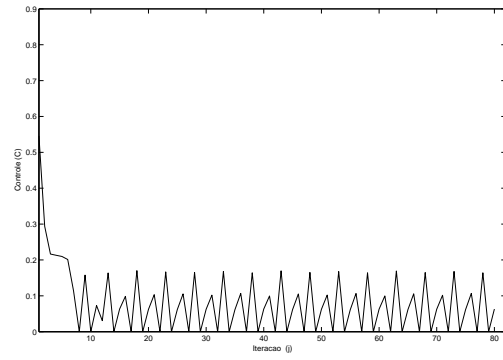
(a) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 20$ .



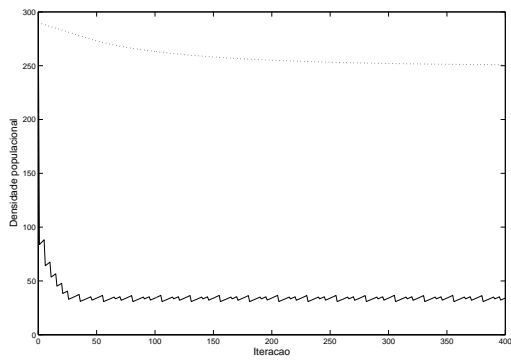
(b) Aplicação de biocida com  $x_0 = 20$ .



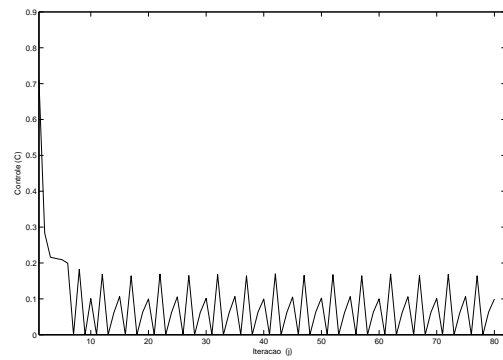
(c) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 190$ .



(d) Aplicação de biocida com  $x_0 = 190$ .



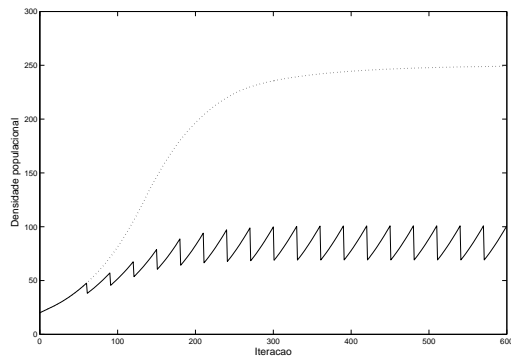
(e) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 290$ .



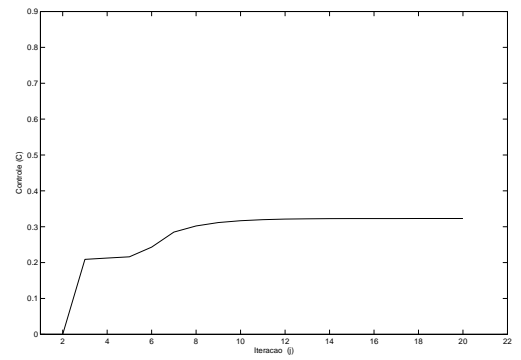
(f) Aplicação de biocida com  $x_0 = 290$ .

Figura 4.4.: Soluções e biocida utilizado para o sistema p-fuzzy controlado com aplicação  $\alpha = 5$ ,  $K = 400$  e condição inicial variando.

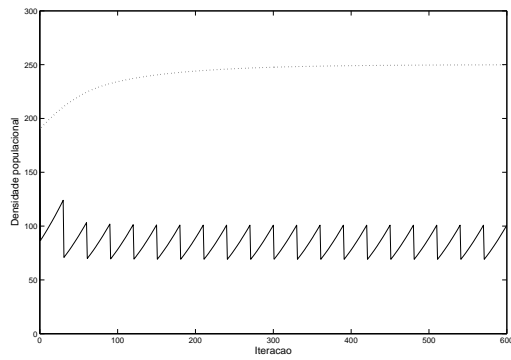




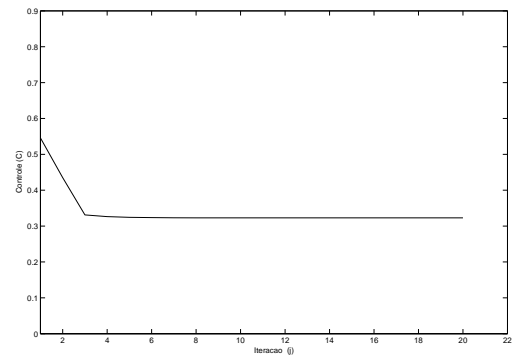
(a) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 20$ .



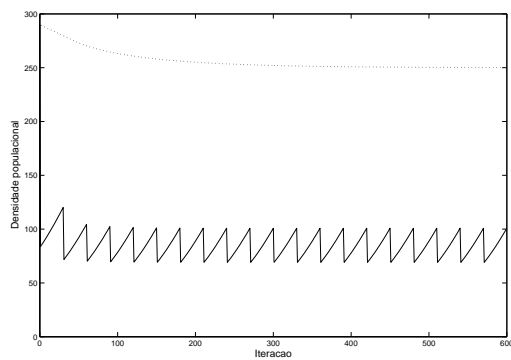
(b) Aplicação de biocida com  $x_0 = 20$ .



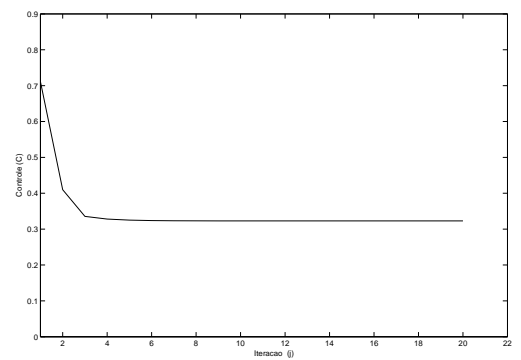
(c) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 190$ .



(d) Aplicação de biocida com  $x_0 = 190$ .



(e) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 290$ .



(f) Aplicação de biocida com  $x_0 = 290$ .

Figura 4.5.: Soluções e biocida utilizado para o sistema p-fuzzy controlado com aplicação  $\alpha = 30$ ,  $K = 600$  e condição inicial variando.

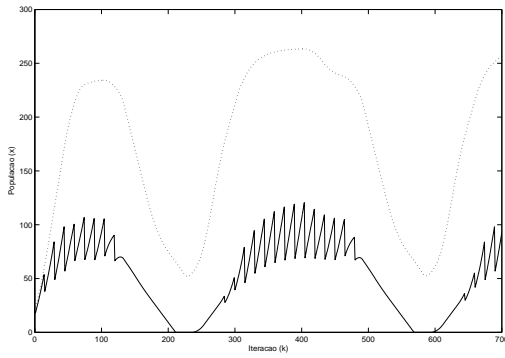
## Experimentos Parte II

Os experimentos agora serão realizados utilizando ainda a mesma SBRF para controle, porém com a diferença de que a variação será dada por um sistema p-fuzzy com crescimento influenciado pela condição ambiental, dado pela base de regras da Tabela 3.1.

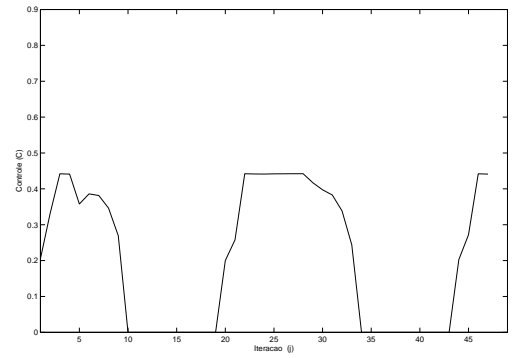
As soluções do sistema não controlado são periódicas e por isso, devemos ter algumas diferenças no modo como a SBRF controla o sistema. Nestas simulações temos ainda um parâmetro do sistema que é o a condição ambiental inicial da simulação (*Favorável*, *Pouco Favorável* ou *Desfavorável*) que no Capítulo 3 foi chamado  $k_0$ .

Começamos as simulações com um ambiente *Favorável* ( $k_0 = 1$ ). A Figura 4.6 traz as soluções para aplicação a cada 15 dias. Vejamos que como em certos momentos a variação é negativa, temos controle negativo, conforme nossa base de regras foi construída. Nestes experimentos perceberemos que como temos um ambiente periódico, com o passar do tempo teremos os mesmos valores de densidade populacional e portanto teremos um controle parecido após alguma iterações, mesmo com pontos iniciais diferentes.

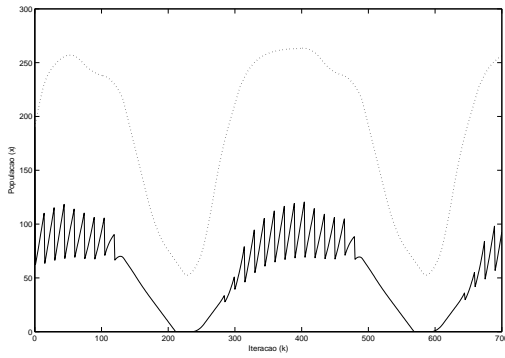
Na Figura 4.7 podemos observar como a mudança de condição ambiental inicial altera o modo como o biocida deve ser aplicado. Além disso, agora que  $\alpha = 5$  o patamar é bem mais baixo. Isso mostra que, assim como nos experimentos da parte I, aqui o período de aplicação influencia neste patamar. Neste caso, algumas simulações mostraram que a aplicação a cada 5 iterações deixa em patamares baixos. Leve-se em conta que não obstante ser um valor menor que encontrado nos experimentos da parte I, durante os períodos em que há condições *Desfavoráveis*, o veneno não é aplicado.



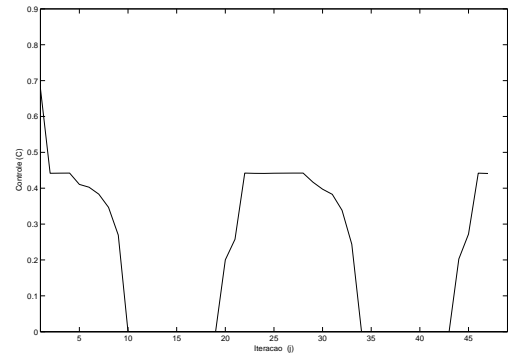
(a) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 20$ .



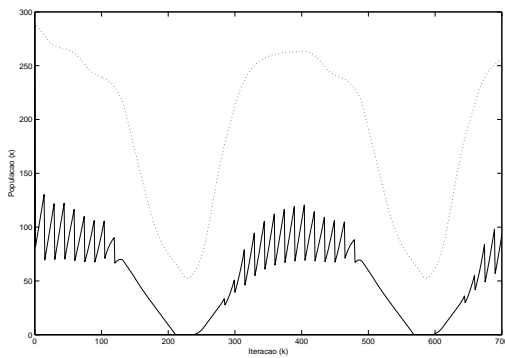
(b) Aplicação de biocida com  $x_0 = 20$ .



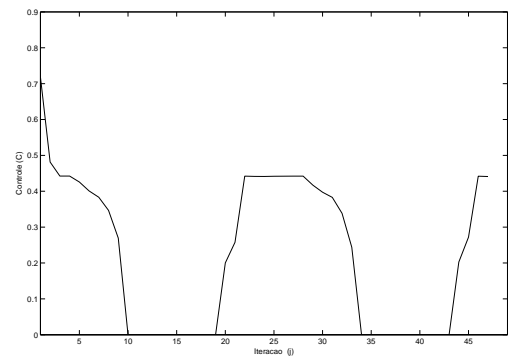
(c) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 190$ .



(d) Aplicação de biocida com  $x_0 = 190$ .

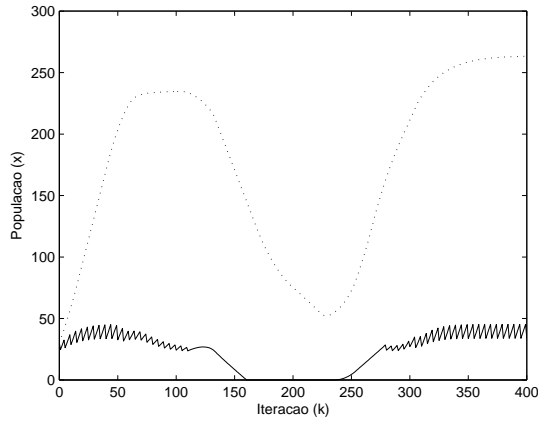


(e) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 290$ .

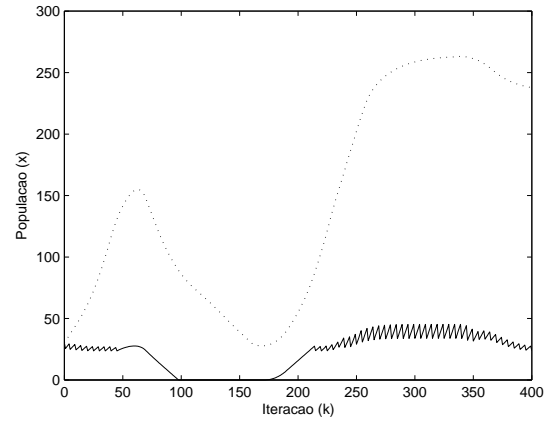


(f) Aplicação de biocida com  $x_0 = 290$ .

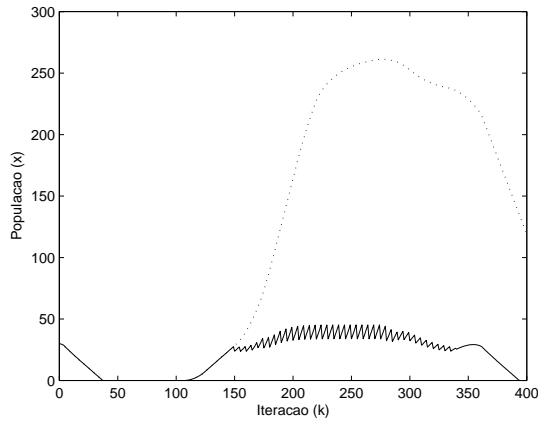
Figura 4.6.: Soluções e biocida utilizado para o sistema p-fuzzy com condição ambiental inicial  $k_0 = 1$  controlado com aplicação  $\alpha = 15$ ,  $K = 700$  e condição inicial variando.



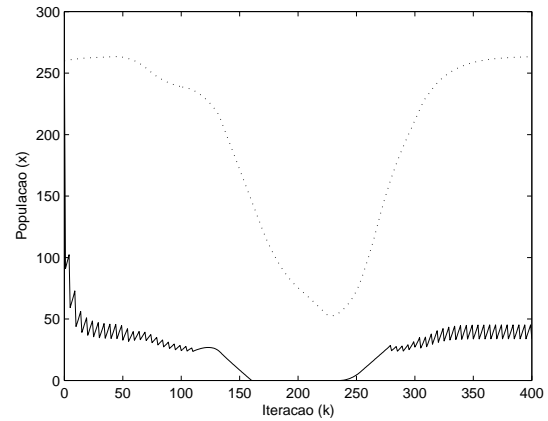
(a) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 30$  e  $k_0 = 0$  (*Favorável*).



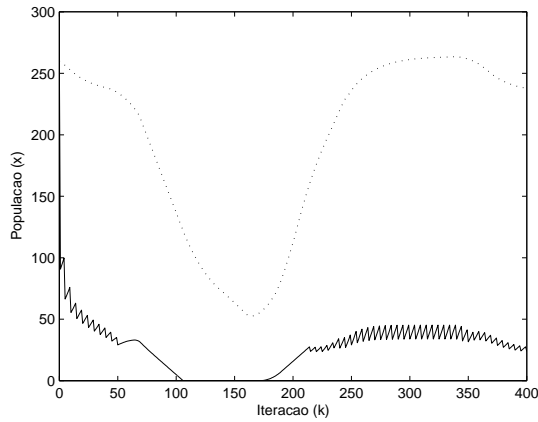
(b) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 30$  e  $k_0 = 65$  (*Pouco Favorável*).



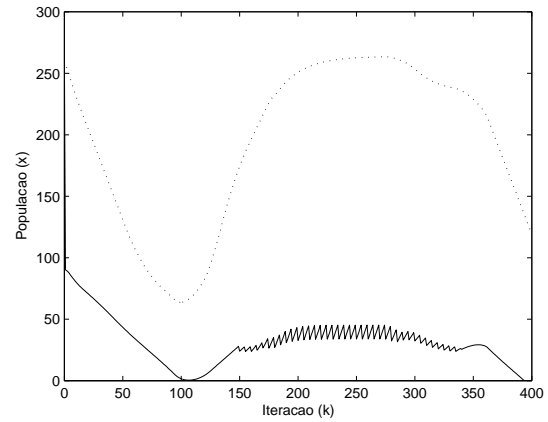
(c) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 30$  e  $k_0 = 130$  (*Desfavorável*).



(d) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 260$  e  $k_0 = 0$  (*Pouco Favorável*).



(e) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 260$  e  $k_0 = 65$  (*Favorável*).



(f) Solução controlada (linha contínua) e sem controle (linha pontilhada) com  $x_0 = 260$  e  $k_0 = 130$  (*Pouco Favorável*).

Figura 4.7.: Soluções para o sistema p-fuzzy com condição ambiental controlado com aplicação  $\alpha = 5$ ,  $K = 400$  e condição inicial e condição ambiental inicial variando.

### 4.3. Modelo Bidimensional Híbrido: Químico e Biológico

O modelo bidimensional, em comparação com o unidimensional dá uma pequena alteração dada a sua particularidade. Neste caso o SBRF continuará sendo uma função  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  porém adotamos como variáveis de entrada a densidade da presa  $x$  e também a do predador  $y$ , que serão controladas. A saída será a taxa de matança do biocida (*kill rate*). Durante os experimentos esta taxa poderá ser considerada diferenciada para a presa e o predador.

Nos casos de modelos bidimensionais para controle de pragas, principalmente que controle biológico, a espécie que se quer controlar é considerada presa e seu seu controlador biológico o predador. Peixoto et al. [22] usaram um controlador fuzzy para modelar, porém não dinamicamente, o controle químico para Morte Súbita de Citros.

#### 4.3.1. Modelagem

Novamente utilizaremos do capítulos anteriores para mostrar nosso sistema especialista entrando em ação com o objetivo de controlar a densidade populacional, principalmente das presas. Agora a arquitetura do sistema terá a diferença de que o controle será dado em função da densidade populacional da presa e do predador. Isso faz sentido, do ponto de vista biológico na medida em que se o predador está com densidade maior, não há necessidade de tanto veneno. A Figura 4.8 nos dá o esquema do modo como funcionará o sistema especialista de controle.

Esta arquitetura de fato representa o esquema da Equação (4.2), que é baseada na Equação 2.5, porém com a inserção da variável  $\mathcal{C}$ , resultando no sistema p-fuzzy descrito na equação:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (x_k + \Delta_x) \cdot (1 - \mathcal{C}(x_k, y_k)) \\ y_{k+1} = (y_k + \Delta_y) \cdot (1 - \omega \cdot \mathcal{C}(x_k, y_k)) \\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad , \quad (4.2)$$

em que  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  são dadas por um sistema p-fuzzy bidimensional e  $\mathcal{C}(x_k, y_k)$  é dado por um SBRF e  $\omega \in [0; 1]$  representa um peso de matança do biocida na população de predadores.  $\omega$  se justifica na medida em que alguns biocidas têm uma taxa de mataça diferente para cada espécie.

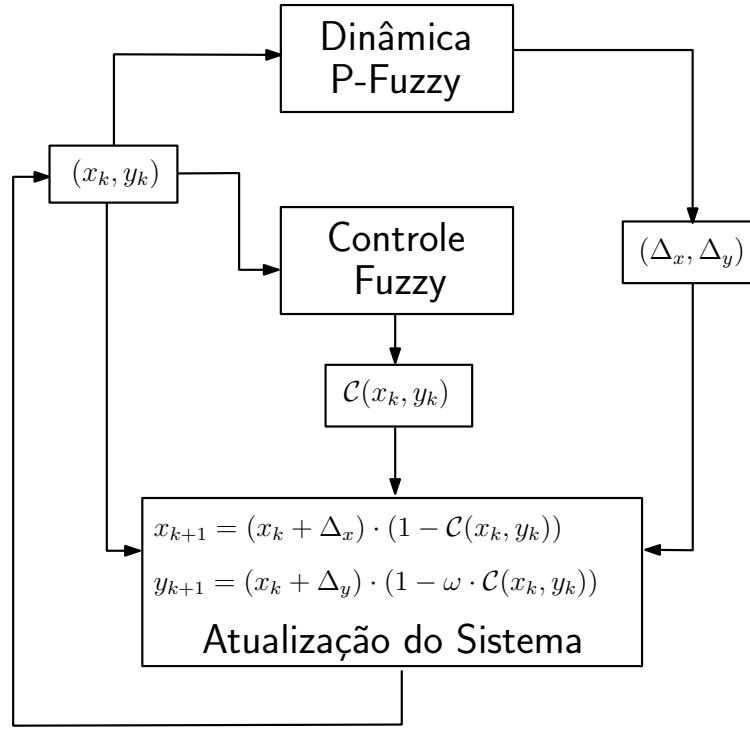


Figura 4.8.: Arquitetura do sistema p-fuzzy bidimensional com controle da densidade populacional através de biocida acoplado ao sistema presa-predador.

O valor  $(1 - \mathcal{C}(x_k, y_k)) \in [0; 1]$  representa a porcentagem de densidade populacional que sobrará após a aplicação do biocida.

Como dissemos, usaremos uma SBRF para determinar o total de biocida a ser aplicado. A base de regras para o controle foi construída seguindo seguintes pressupostos:

- (i) Neste caso bidimensional as entradas do SBRF de controle são  $x$  e  $y$ . Isso significa que nosso sistema especialista é híbrido. Leva em conta para controlar a infestação tanto o controle químico e bem como o predador natural. Desta forma as regras foram contruídas de modo que se a infestação puder ser controlada pelo predador natural então não será empregado o biocida.
- (ii) As variáveis de entrada  $x$  e  $y$ , densidade populacional de presas e predadores, terão termos linguísticos  $\mathcal{T}_x = \mathcal{T}_y = \{Baixa (B), Média Baixa (MB), Média (M), Média Alta (MA) e Alta (A)\}$  que determinam os estados subjetivos das variáveis de entrada. As funções de pertinência para estas variáveis estão mostradas nas Figuras 4.9(a) e 4.9(b). Por se tratar

de modelagem teórica teremos os valores de densidade populacional tanto de presa quanto de predador variarão no intervalo  $[0; 100]$

- (iii) Para a variável de saída  $\mathcal{C}$ , que representará subjetivamente os estados de Controle do sistema, os termos linguísticos serão  $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} = \{Nulo (\mathcal{C}_0), Baixa (\mathcal{C}_B), Médio (\mathcal{C}_M), e Alto (\mathcal{C}_A)\}$ . As funções de pertinência para esta variável estão representadas na Figura 4.9(c) e são as mesmas para o sistema de controle unidimensional.
- (iv) Por conta da quantidade de estados de entrada (5 para  $x$  e 5 para  $y$ ) temos um total de 25 regras. A Tabela 4.2 mostra as regras utilizadas. Por exemplo, se densidade populacional da presa ( $x$ ) for Média Baixa ( $MB$ ) e densidade populacioanal do predador ( $y$ ) for Média Baixa ( $MB$ ) então o taxa de controle a ser aplicada será Baixa ( $\mathcal{C}_B$ ) com valor real dado pela SBRF através de um controlador de Mamdani com defuzzificação por centro de massa.

$x \backslash y$	Baixa ( $B$ )	Média Baixa ( $MB$ )	Média ( $M$ )	Média Alta ( $MA$ )	Alta ( $A$ )
Baixa ( $B$ )	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$	$\mathcal{C}_0$
Média Baixa ( $MB$ )	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_B$	$\mathcal{C}_B$	$\mathcal{C}_0$
Média ( $M$ )	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_M$	$\mathcal{C}_B$
Média Alta ( $MA$ )	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_M$
Alta ( $A$ )	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$

Tabela 4.2.: Base de regras para a SBRF bidimensional que determina a quantidade de biocida a ser aplicada  $\mathcal{C}$ .

#### 4.3.2. Experimentos Numéricos

Para fazermos os experimentos numéricos, da mesma forma que no modelo unidimensional, e seguindo o esquema de arquitetura que expusemos na Figura 4.8, vamos mostrar como foi feito o algoritmo que acopla o SBRF de controle com um sistema p-fuzzy bidimensional que está mostrado na Equação 4.2. Para isso seguimos levamos em conta que:

- $x_k$  é a população de presas na iteração  $k$ ;
- $y_k$  é a população de predadores na iteração  $k$ ;

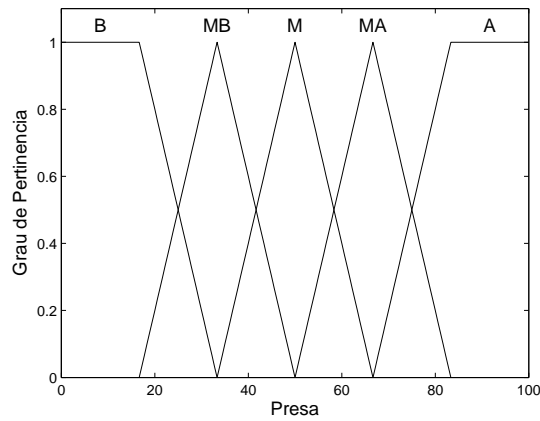
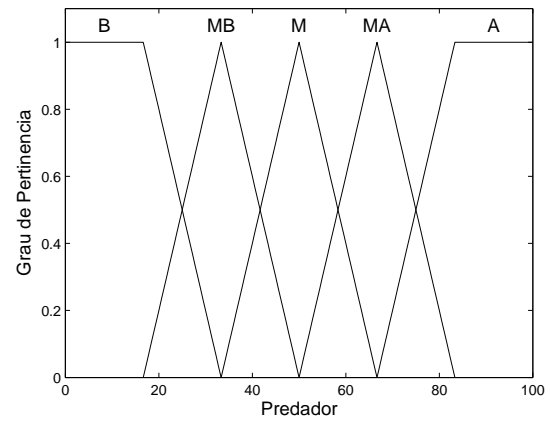
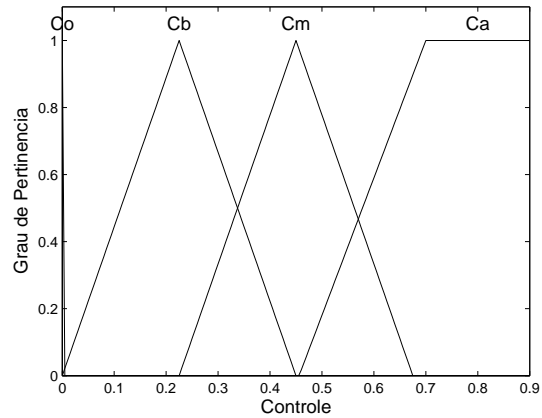
(a) Entrada: Presa ( $x$ ).(b) Entrada: Predador ( $y$ ).(c) Saída: Controle ( $C$ ).

Figura 4.9.: Funções de pertinência de entrada e saída para o SBRF de controle bidimensional para presa-predador.



- $\Delta_x(x_k, y_k)$   $\Delta_y(x_k, y_k)$  são respectivamente a variação populacional da presas e do predador.  $k$ ;
- $K$  o número total de iterações do sistema p-fuzzy;
- $\alpha$  o período de aplicação do biocida. Este parâmetro corresponde ao período de intermitência entre as aplicações do veneno na população.
- $\omega$  é o peso que a taxa de matança  $\mathcal{C}$  tem em cima dos predadores. Este parâmetro é importante para diferenciarmos quando o temos um biocida específico ou que não tem a mesma mortalidade entre as presas e os predadores.
- $\mathcal{F}$  é a função que representa o SBRF com a base de regras fuzzy para densidade populacional, bidimensional. Utilizaremos o sistema p-fuzzy baseado nos modelos de Kolmogorov com ou sem condição ambiental acoplada dados nas Seções 2.4 e 3.3.
- $\mathcal{C}(x_k, y_k)$  o controle a ser aplicado na iteração  $k$ .
- $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$  representa a SBRF que determina o controle, composta das regras da Tabela 4.2.

O Algoritmo 4 nos dá a maneira pela qual fizemos os experimentos. Note que vamos usar o mesmo artifício do modelo unidimensional para fazermos a periodicidade da aplicação. Encontramos o resto da divisão de  $k - 1$  por  $\alpha$  que nos dá sempre valores entre 0 e  $(\alpha - 1)$ . Quando  $j = 0$ , então a aplicação é feita, caso contrário as atualizações de  $x_k$  e  $y_k$  são feitas normalmente.

Leve-se em consideração que quando  $\mathcal{F}$  requisitar outras variáveis de entrada, como por exemplo quando estamos trabalhando com condição ambiental, efetuamos os ajustes necessários para o experimento finalizar corretamente.

---

**Algoritmo 4** Passos para solução do sistema p-fuzzy bidimensional com controle químico da densidade populacional de presas e predadores.

---

**Entrada:**  $x_0, y_0, K, k_0, \alpha, \omega$

**Para**  $k$  de 1 até  $K$  **Faça**

$j \leftarrow (k - 1) \bmod \alpha$

**Se**  $j = 0$  **Então**

$(\Delta_x, \Delta_y) \leftarrow \mathcal{F}(x_k, y_k)$

$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{F}_{\mathcal{C}}(x_k, y_k)$

$x_{k+1} \leftarrow (x_k + \Delta_x) \cdot (1 - \mathcal{C})$

$y_{k+1} \leftarrow (y_k + \Delta_y) \cdot \omega(1 - \mathcal{C})$

**Senão**

$(\Delta_x, \Delta_y) \leftarrow \mathcal{F}(x_k)$

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_x$

$y_{k+1} \leftarrow y_k + \Delta_y$

**Fim Se**

**Fim Para**

**Saída:**  $x_K$

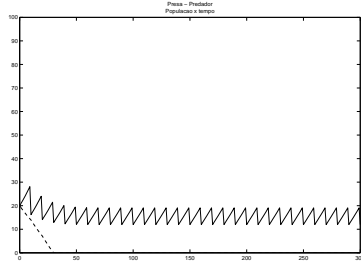
---

## Experimentos Parte I

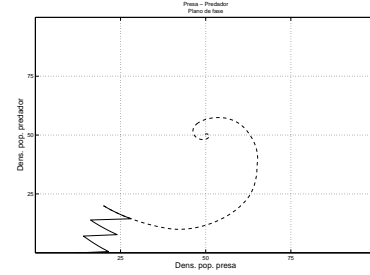
Nesta primeira parte de experimentos vamos mostrar que o SBRF, que foi “afinado” através de simulações, consegue colocar a população de presas em níveis aceitáveis. Veremos que a população de predadores também diminui, não só por conta do biocida mas como temos predação específica, não há alimento suficiente para que cresça. Nesta primeira parte utilizamos os sistemas p-fuzzy baseados nos modelos de Kolmogorov.

A Figura 4.10 mostra simulações feitas em que utilizou-se para a dinâmica populacional a base de regras do Quadro 5, que resulta em uma dinâmica do tipo presa-predador com ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Experimentos numéricos mostram que com este período de aplicações não houve mudanças consideráveis no comportamento das soluções e por isso não variamos a base de regras responsável pela variação da densidade. Neste caso aplicamos veneno a cada 10 iterações e variamos os pontos iniciais. O sistema de controle conseguiu, independente do ponto inicial, levar o sistema para o mesmo patamar de  $x$ , e por conta disso, o mesmo de  $y$  em todas as simulações.

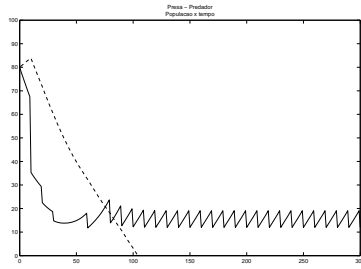
A Figura 4.11 mostra simulações feitas do mesmo modo que as anteriores porém agora com



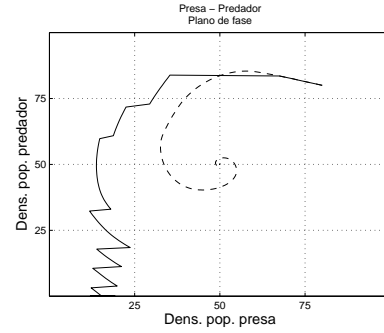
(a) Solução com ponto inicial  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada)



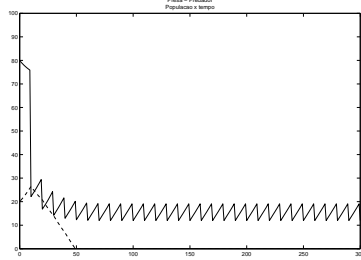
(b) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 20$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



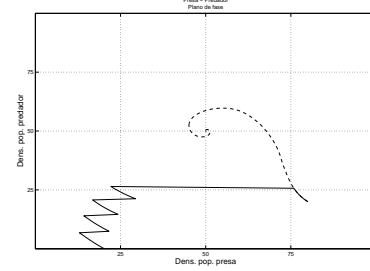
(c) Solução com ponto inicial  $x_0 = 80$  (linha contínua) e  $y_0 = 80$  (linha pontilhada)



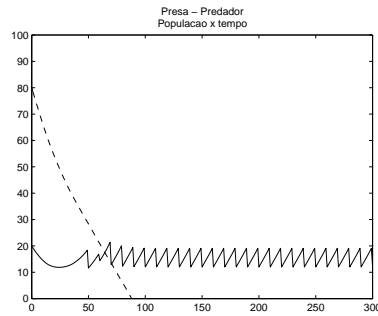
(d) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 80$  e  $y_0 = 80$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



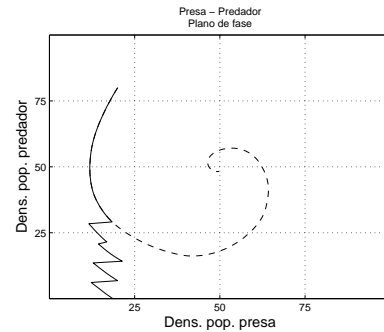
(e) Solução com ponto inicial  $x_0 = 80$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada)



(f) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 80$  e  $y_0 = 20$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



(g) Solução com ponto inicial  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 80$  (linha pontilhada)



(h) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 80$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.

Figura 4.10.: Soluções e Planos de Fase do sistema p-fuzzy presa-predador controlado com aplicação  $\alpha = 10$ ,  $\omega = 0$  e condição inicial variando.

aplicação de biocida a cada 30 iterações e variamos os pontos iniciais. O sistema de controle conseguiu, independente do ponto inicial, levar o sistema para o mesmo patamar de  $x$ , e por conta disso, o mesmo de  $y$  para as simulações, porém percebemos que este patamar é maior e de fato está, para  $x$  muito próximo do ponto de equilíbrio (50, 50). Isso significa que o tempo de aplicação é muito grande e o sistema não está sendo controlado a contento.

Como último experimento desta parte, a Figura 4.12 mostra agora uma simulação feita com  $\omega = 1$ . Assim a taxa de matança do biocida é igual tanto para presa quanto para predador. Note-se que por conta disso nossos planos de fases são diferentes, mas ao observarmos as soluções percebemos que de fato com o passar do tempo, temos um comportamento parecido com os da Figura 4.10.

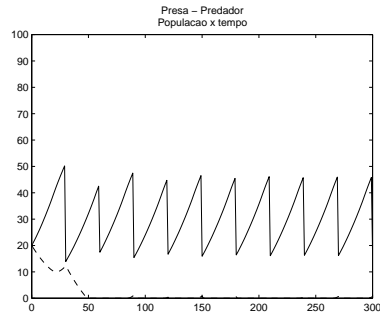
## Experimentos Parte II

Nestes experimentos utilizaremos para controlar sistemas p-fuzzy do tipo presa-predador com condição ambiental inserida. Neste caso vamos utilizar a base de regras mencionada na Parte II dos experimentos feitos na Seção 3.3. Como temos uma condição ambiental influenciando na variação, em nosso Algoritmo 4 inserir como **Entrada**  $k_0$ , que nos dá a condição ambiental inicial da simulação.

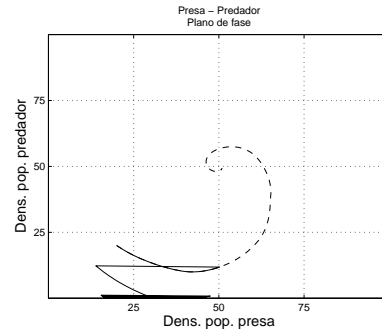
A primeira simulação, que está na Figura 4.13 é a comparação dos planos de fase em que variamos apenas a condição ambiental inicial  $k_0$ . Além disso o biocida apenas ataca as presas. Percebemos que embora tenhamos condições ambientais diferentes o SBRF controla bem o sistema, levando-o, nos três experimentos aproximando pela esquerda de  $x = 30$ , sendo este valor nunca alcançado.

A Figura 4.14 mostra agora os planos de fase para  $\omega = 1$ , e portanto temos o controle sendo exercido em ambas as populações. Neste caso, houve variação da condição ambiental inicial. Não há aqui uma diferença considerável com relação ao experimento anterior. Pode-se perceber que muito embora as soluções dos sistemas não controlados são diferentes, ao acoplarmos o sistema de controle, temos um comportamento parecido.

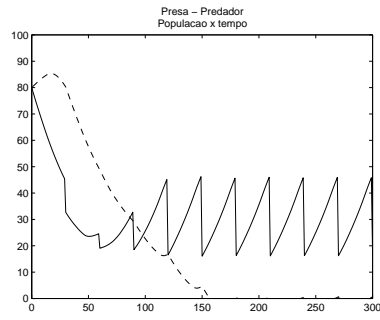
Uma ilustração interessante é o caso da Figura 4.15 em que utilizamos  $(x_0, y_0) = (80, 20)$ ,  $\omega = 0.5$ , o que significa que com relação às presas o biocida será 50% menos eficiente para os predadores. Porém nosso período de aplicação  $\alpha$  ficou em 30 iterações. Notamos que o controle



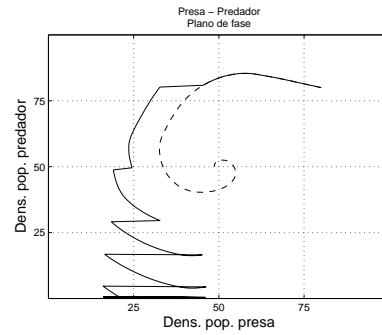
(a) Solução com ponto inicial  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada)



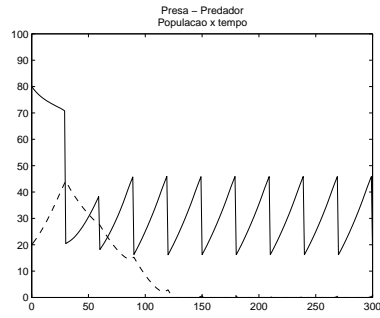
(b) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 20$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



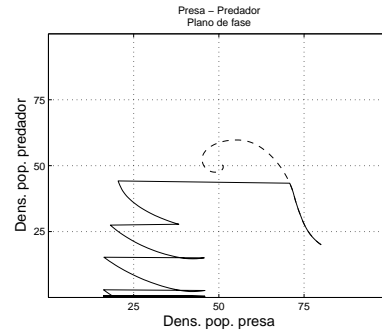
(c) Solução com ponto inicial  $x_0 = 80$  (linha contínua) e  $y_0 = 80$  (linha pontilhada)



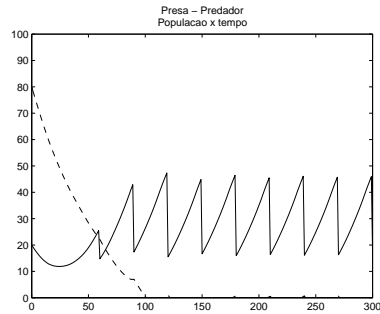
(d) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 80$  e  $y_0 = 80$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



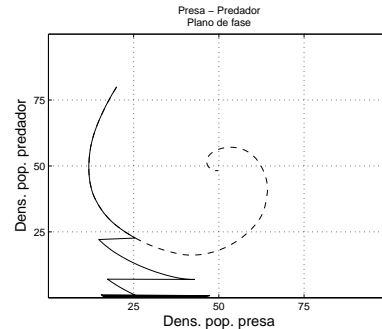
(e) Solução com ponto inicial  $x_0 = 80$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada)



(f) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 80$  e  $y_0 = 20$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.

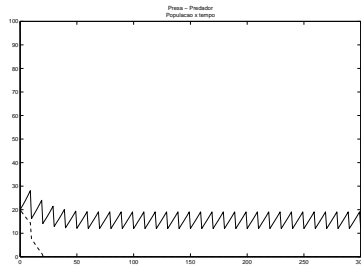


(g) Solução com ponto inicial  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 80$  (linha pontilhada)

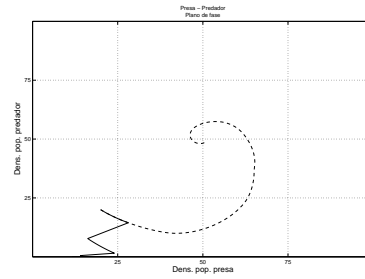


(h) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 80$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.

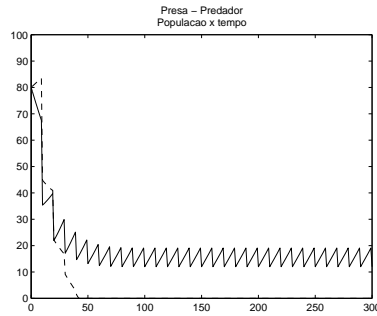
Figura 4.11.: Soluções e Planos de Fase do sistema p-fuzzy presa-predador controlado com aplicação  $\alpha = 30$ ,  $\omega = 0$  e condição inicial variando.



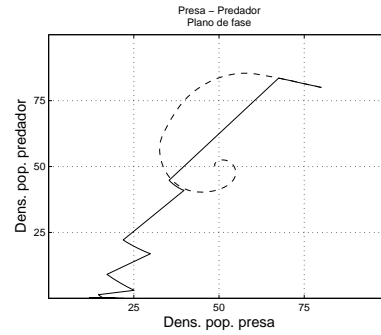
(a) Solução com ponto inicial  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada)



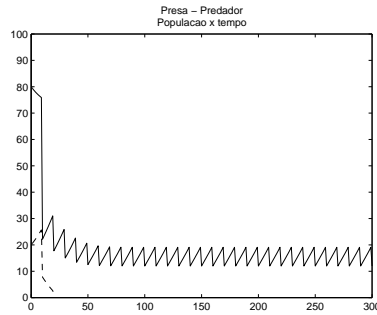
(b) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 20$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



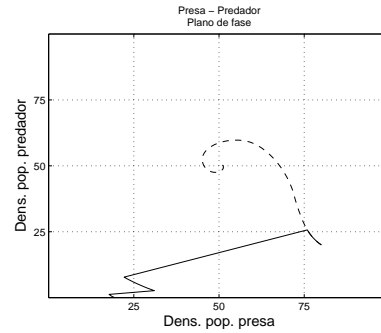
(c) Solução com ponto inicial  $x_0 = 80$  (linha contínua) e  $y_0 = 80$  (linha pontilhada)



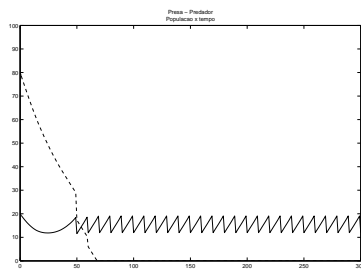
(d) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 80$  e  $y_0 = 80$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.



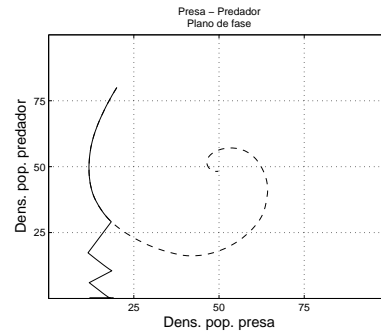
(e) Solução com ponto inicial  $x_0 = 80$  (linha contínua) e  $y_0 = 20$  (linha pontilhada)



(f) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 80$  e  $y_0 = 20$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.

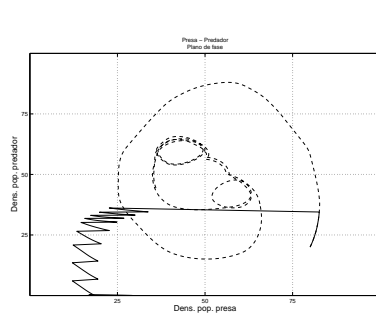


(g) Solução com ponto inicial  $x_0 = 20$  (linha contínua) e  $y_0 = 80$  (linha pontilhada)

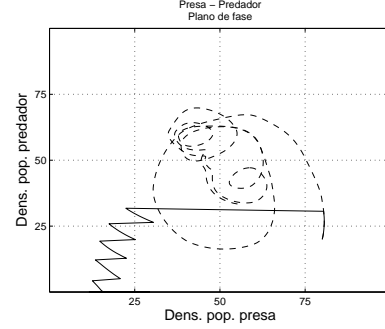


(h) Plano de fase com ponto inicial  $x_0 = 20$  e  $y_0 = 80$ . Pontilhado o plano de fase para as mesmas regras, sem controle.

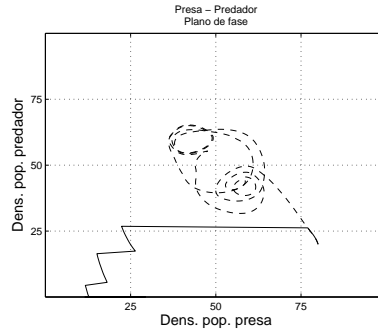
Figura 4.12.: Soluções e Planos de Fase do sistema p-fuzzy presa-predador controlado com aplicação  $\alpha = 10$ ,  $\omega = 1$  e condição inicial variando.



(a) Plano de fase com condição ambiental inicial *Favorável* ( $k_0 = 0$ ). Linha pontilhada é plano de fase não controlado.

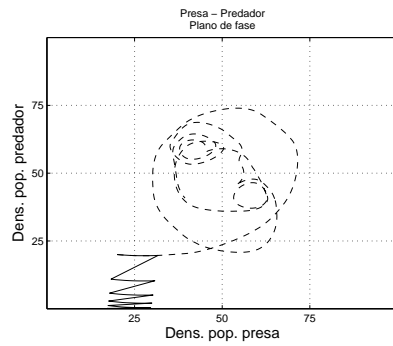


(b) Plano de fase com condição ambiental inicial *Pouco Favorável* ( $k_0 = 65$ ). Linha pontilhada é plano de fase não controlado.

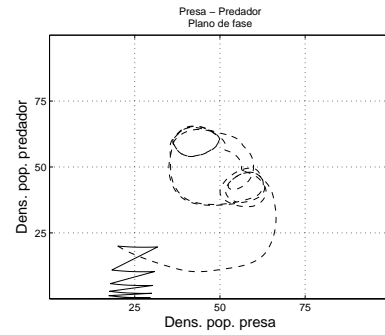


(c) Plano de fase com condição ambiental inicial *Desfavorável* ( $k_0 = 130$ ). Linha pontilhada é plano de fase não controlado.

Figura 4.13.: Planos de Fase do sistema p-fuzzy presa-predador controlado com aplicação  $\alpha = 10$ ,  $\omega = 0$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (80, 20)$ .



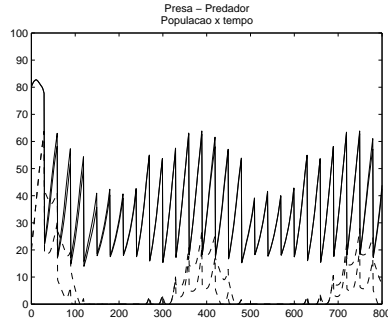
(a) Plano de fase com condição ambiental inicial ( $k_0 = 0$ ). Linha pontilhada  $\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}$  plano de fase não controlado.



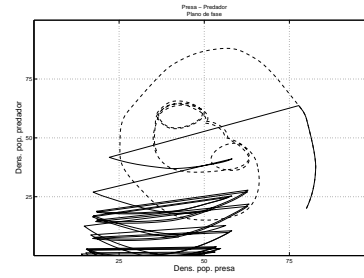
(b) Plano de fase com condição ambiental inicial ( $k_0 = 100$ ). Linha pontilhada  $\tilde{\gamma}_{\frac{1}{2}}$  plano de fase não controlado.

Figura 4.14.: Planos de Fase do sistema p-fuzzy presa-predador controlado com aplicação  $\alpha = 10$ ,  $\omega = 1$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (20, 20)$ .

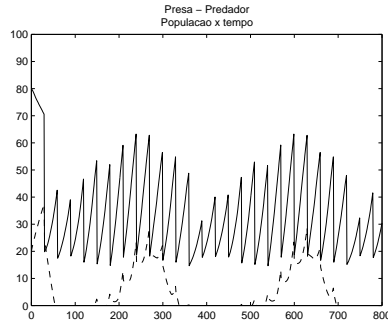
não foi muito eficiente, fazendo com que os valores da densidade populacional de presas  $x$  ficassem muito perto do seu valor sem controle. Isso significa que nosso período de aplicações é muito esparsa, devendo-se diminuir o período. Simulações mostraram que este período deve variar, para manter num patamar abaixo de 30 entre 8 e 12 iterações. Mesmo variando-se a condição ambiental inicial, temos o mesmo tipo de comportamento, com o passar das iterações.



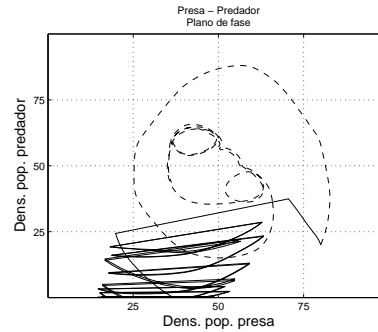
(a) Solução com condição ambiental inicial ( $k_0 = 0$ ). ( $x$  – contínuo e  $y$  – pontilhado).



(b) Plano de fase com condição ambiental inicial ( $k_0 = 0$ ). Linha pontilhada é plano de fase não controlado.



(c) Solução com condição ambiental inicial ( $k_0 = 130$ ). ( $x$  – contínuo e  $y$  – pontilhado).



(d) Plano de fase com condição ambiental inicial ( $k_0 = 130$ ). Linha pontilhada é plano de fase não controlado.

Figura 4.15.: Solução se planos de fase do sistema p-fuzzy presa-predador controlado com aplicação  $\alpha = 30$ ,  $\omega = 0.5$  e condição inicial  $(x_0, y_0) = (80, 20)$  e condição ambiental variando.

## 4.4. Conclusão

Neste capítulo mostramos que é possível contruir um sistema especialista que controle uma determinada espécie através do uso de um biocida. Os modelos unidimensionais e bidimensionais mostrar-se bastante robustos durante as simulações.



As bases de regras foram modificadas durante as simulações de modo a fazer com que o modelo se comportasse do modo desejado. Pudemos também ajustar o período de aplicação. Neste sentido, percebe-se que os períodos de aplicação menores, evidentemente controlam melhor a praga, não obstante o gasto maior com biocida. Leve-se em conta que

Um ambiente de testes real seria interessante para testar os modelos tanto uni quanto bidimensionais. Isto será proposto como trabalho futuro a esta dissertação.

## Capítulo 5.

### Considerações Finais

Este capítulo serve para apresentar algumas considerações finais sobre o trabalho, haja vista as conclusões pontuais já terem sido feitas no final de cada capítulo.

O Capítulo 1 objetivou dar uma visão da teoria de conjuntos fuzzy bem como apresentar os Sistemas Baseados em Regras Fuzzy que foram utilizados largamente neste trabalho. Já o capítulo 2 apresentou os Sistemas Dinâmicos P-fuzzy unidimensionais e bidimensionais de modo a possibilitar a construção dos modelos que foram apresentados posteriormente.

Desenvolvemos no capítulo 3 um sistema p-fuzzy que levou em conta as condições externas da população a ser modelada. Como condições ambientais, foram consideradas qualquer fator extrínseco à espécie que influencie em sua variação populacional. Por se tratar de um modelo teórico, a base de regras foi montada de modo a demonstrar quão robusto é o sistema. No caso de um problema real, um especialista iria auxiliar para a construção da base de regras, auxiliando no ajuste das funções de pertinência que representam os estados de favorabilidade ou desfavorabilidade.

Terminamos este trabalho apresentando Capítulo 4 um SBRF híbrido que controla tanto sistemas p-fuzzy unidimensionais quanto bidimensionais.

Nos unidimensionais as entradas do controle são a densidade populacional e a variação populacional e a saída o controle químico a ser aplicado, como taxa de matança (*kill rate*). Isso faz com que, quando a variação populacional seja negativa (por exemplo quando estamos em um ambiente *Desfavorável*) não há a necessidade de inserir controle químico.

Nos sistemas bidimensionais, no caso com uma interação do tipo presa-predador, o SBRF

tem o como entradas a população de presas e a população de predadores. A saída será novamente o controle agora para as duas espécies. Para diferenciar a taxa de matança em cada espécie, simulações foram feitas com e sem controle específico. Esta entrada do sistema se justifica, na medida em que se temos uma matança alta do predador natural, não há a necessidade de controle químico, tornando o sistema híbrido, levando em conta tanto a controle químico quanto biológico.

## 5.1. Trabalhos Futuros

### 5.1.1. Análise de Equilíbrios do Sistema P-fuzzy com Condição Ambiental

O modelo com condição ambiental apresentado mostrou-se robusto e além disso as simulações numéricas levaram-nos a perceber a existência de regiões de “equilíbrios”, que podem ser pesquisados e demonstrados sua efetiva existência, tomando por base os teoremas mostrados no capítulo 2 e os ampliando para comportar  $\kappa$ .

### 5.1.2. Aplicação do Modelo de Condição Ambiental

Haja vista que o modelo apresentando no Capítulo 3 é apenas teórico, um trabalho futuro seria aplicar este modelo em alguma população que sofresse grande influência das condições ambientais, afinando a base de regras com algum especialista nesta espécie.

### 5.1.3. Controle Ótimo Fuzzy

Modelos clássicos de controle de populações utilizam-se da Teoria do Controle Ótimo que visa não só fornecer o programa de controle, mas também minimizar o custo de biocida usado durante a aplicação [12, 13]. No caso do modelo que apresentamos, a minimização do custo controle não foi contemplada. Acreditamos que com alguns ajustes, é possível acoplar aos sistemas p-fuzzy com controle dado por um SBRF a um modelo de Controle Ótimo, que minimize o custo de aplicação.

## Referências Bibliográficas

- [1] L. C. Barros, *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy – teoria e aplicações*, Tese de doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas, 1997.
- [2] L. C. Barros and R. C. Bassanezi, *Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática*, Coleção IMECC - Textos Didáticos, vol. 5, IMECC–Unicamp, Campinas/SP, 2006.
- [3] R. C. Bassanezi and W. C. Ferreira Jr., *Equações diferenciais com aplicações*, Habra, São Paulo, 1988.
- [4] R. E. Bellman and L. A. Zadeh, *Decision-making in a fuzzy environment*, Management Science **17** (1970), no. 4, B141–B164.
- [5] M. Botton, O. Nakano, and A. Kovaleski, *Controle químico da lagarta-enroladeira* (Bonagota cranaodes meyrick) *na cultura da macieira*, Pesq. agropec. bras. **35** (2000), no. 11, 2139–2144.
- [6] A. Braga and C. R. Sousa-Silva, *Afídeos de citros* (Citrus sinensis) *e seus predadores na região de São Carlos-SP*, Monografia, Departamento de Ecologia e Biologia Evolutiva da Universidade Federal de São Carlos, 1999.
- [7] M. S. Cecconelo, *Modelagem alternativa para dinâmica populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*, Dissertação de Mestrado, IMECC–Unicamp, Campinas, 2006.
- [8] J. Daghljan, *Lógica e Álgebra de Boole*, 4 ed., Atlas, São Paulo, 2008.
- [9] M. R. B. Dias, *Equações diferenciais ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido*, Dissertação de mestrado, IMECC–UNICAMP, Campinas, 2006.
- [10] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical models in biology*, SIAM – Society for Industrial & Applied, February 2005.
- [11] D. Gallo, O. Nakano, F. M. Wiendl, S. S. Neto, and R. P. L. Carvalho, *Manual de entomologia: pragas das plantas e seu controle*, Editora Agronômica Ceres, São Paulo, 1970.
- [12] B.-S. Goh, *Management and analysis of biological populations*, Elsevier Scientific Pub. Co., New York, 1980.

- [13] B.-S. Goh, G. Leitmann, and T. L. Vincent, *Optimal control of a prey-predator system*, Mathematical Biosciences **19** (1974), no. 3–4, 263–286.
- [14] A. Gonring, M. Picanço, M. Moura, L. Bacci, and C. Bruckner, *Seletividade de inseticidas, utilizados no controle de Grapholita molesta (Busch) (Lepidoptera: Olethreutidae) em pêssego, a Vespidae predadores*, An. Soc. Entomol. Bras. **28** (1999), no. 2, 301–306.
- [15] D. Hanselman and B. Littlefield, *Matlab 6: curso completo*, Prentice-Hall, São Paulo, 2003.
- [16] B. Kosko, *Fuzzy thinking: The new science of fuzzy logic*, Hyperion, New York, 1993.
- [17] L. P. M. Macedo, J. F. Garcia, and E. L. V. Primiano, *Ocorrência de joaninhas (Coleoptera: Coccinellidae) em citros no estado de São Paulo*, Revista Coopercitrus **205** (2004), 21–32.
- [18] M. T. Mizukoshi, *Estabilidade de sistemas dinâmicos fuzzy*, Tese de doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas, 2004.
- [19] J. D. Murray, *Mathematical biology I*, vol. 1, Springer, January 2002.
- [20] W. Pedrycz and F. Gomide, *An introduction to Fuzzy Sets: analysis and design*, The MIT Press, USA, 1998.
- [21] M. S. Peixoto, *Sistemas dinâmicos e controladores fuzzy: Um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em são paulo*, Tese de Doutorado, IMECC–UNICAMP, Campinas, 2005.
- [22] M. S. Peixoto, L. C. Barros, and R. C. Bassanezi, *Controle Fuzzy de Biocida na Morte Súbita de Citros*, BIOMATEMÁTICA **15** (2005), 67–76.
- [23] B-E. Sæther, J. Tufto, S. Engen, K. Jerstad, O. W. Røstad, and J. E. Skåtan, *Population dynamical consequences of climate change for a small temperate songbird*, Science **287** (2000), no. 5454, 854–856.
- [24] J. D. M. Silva, *Análise de estabilidade de sistemas dinâmicos p-fuzzy com aplicações em biomatemática.*, Tese de Doutorado, IMECC–Unicamp, Campinas, 2005.
- [25] E. J. Solberg, B-E. Sæther, O. Strand, and A. Loison, *Dynamics of a harvested moose population in a variable environment*, Journal of Animal Ecology **68** (January 1999), 186–204(19).
- [26] C. Viegas Jr., *Terpenos com atividade inseticida: uma alternativa para o controle químico de insetos*, Quim. Nova **26** (2003), no. 3, 390–400.
- [27] L. Weber and P. A. T. Klein, *Aplicação da lógica fuzzy em software e hardware*, Ulbra, 2003.
- [28] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), no. 3, 338–353.

# Apêndice A.

## Programas computacionais

### A.1. Códigos-fonte para Sistema P-fuzzy

#### A.1.1. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Unidimensionais (Seção 2.3.)

```
1  %%% Luiz Rafael dos Santos – IMECC/Unicamp
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %          Crescimento Populacional Inibido P-fuzzy 1D          %
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5  function p = Pfuzzy_1(x0,K)
6  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7  %          Dados do Controlador Fuzzy          %
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  dados_var = readfis('logistico');
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 %          Dados Iniciais          %
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 if nargin==2
14     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
15     n = K; % iteracoes
16 elseif nargin==1
17     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
18     n = 400; % iteracoes
19 else
20     p(1) = input('x0=>');%Populacao Inicial;
21     n = 400; % iteracoes
22 end
23 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
24 %          Dinamica Populacional          %
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 k = 1;
27 for i = 1:n
28     var(i) = evalfis(p(i),dados_var);
```

```

29     p(i+1) = p(i)+ var(i);
30 end
31 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
32 %                                     Plotando                                     %
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 t = 0:n;
35 figure(1)
36 plot(t,p,'k')
37 xlabel('Iteracao','fontsize',13);ylabel('Densidade populacional',...
38 'fontsize',13)
39 RangeY = dados_var.input(1).range;
40 axis([0 n RangeY])
41 hold off

```

#### A.1.2. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Bidimensionais (Seção 2.4.)

[illegible]

```

28 dados=readfis(a);
29 RangeX = dados.input(1).range;
30 RangeY = dados.input(2).range;
31 maxRangeX = max(RangeX);
32 maxRangeY = max(RangeY);
33 rule = getfis(dados,'rulelist');
34 szrule = size(rule);
35 rulelist = rule(:,1:(szrule(2)-2));
36 for i=1:n;
37     Δ=evalfis([X(i) Y(i)],dados);
38     X(i+1)=X(i)+h*Δ(1);
39     Y(i+1)=Y(i)+h*Δ(2);
40     k=k+1;
41 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
42 %                               Valores Fora do Dominio                               %
43 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
44     if X(i+1)>100 | X(i+1)< 0 | Y(i+1)≤ 0 | Y(i+1)>100
45         t=0:k;
46         figure(1)
47         plot(t,Y,'—k',t,X,'k');
48         axis([0 k 0 100])
49         figure(2)
50         hold on
51         plot(X,Y);
52         error('Os valores estao fora do dominio!!!')
53     end
54 end
55 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
56 %                               Plotando                               %
57 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
58 t=0:k;
59 figure(2)
60 plot(t,Y,'b',t,X,'-b');
61 axis([0 k 0 max(maxRangeX,maxRangeY)])
62 figure(1)
63 hold on
64 plot(X,Y,'—k')
65 axis([RangeX RangeY])
66 ax=gca;
67 set(ax,'Xtick',[maxRangeX*0.25 maxRangeX*.50 ...
68 maxRangeX*0.75],'Ytick',[maxRangeY*0.25 maxRangeY*.50 ...
69 maxRangeY*0.75],'XGrid','on','YGrid','on','Box','on')
70 title({'Presa - Predador'},{'Plano de fase'});
71 xlabel('Dens. pop. presa','fontsize',14);ylabel('Dens. pop. ...
72 predador','fontsize',14)
73 hold off

```



## A.2. Códigos-fonte para Sistema P-fuzzy com Condição Ambiental

### A.2.1. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Unidimensionais com condição ambiental (Seção 3.2.)

```

1  %%% Luiz Rafael dos Santos – IMECC/Unicamp
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %          P-Fuzzy 1D com Condicao Ambiental          %
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5  function [p] = Ambientall(x0,k0)
6  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7  %          Dados Iniciais          %
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  p(1) = x0;%Populacao Inicial;
10 n = 300; % iteracoes
11 tau = k0; %epoca de inicio do teste
12 el = 1; %avanco no tempo
13 maxRangeX = max(dados_var.input(1).range);
14 dados_var = readfis('ambiental'); %controlador fuzzy
15 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
16 %          Dinamica Populacional          %
17 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
18 for i = 1:n
19     %%% Condicao Ambiental
20     tau = tau + el;
21     if tau == 1
22         el = 1 ;
23     elseif tau == 180
24         el = -1 ;
25     end
26     %%% Dinamica Ppopulacional
27     var(i) = evalfis([p(i) tau],dados_var);
28     p(i+1) = p(i) + var(i);
29     if p(i+1)≤0
30         p(i+1) =1;
31     end
32 end
33 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
34 %          Plotando          %
35 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
36 t = 0:n;
37 plot(t,p,':k')
38 xlabel('Interacao (k)')
39 ylabel('Populacao')
40 axis([0 n 0 maxRangeX])

```

### A.2.2. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Bidimensionais com condição ambiental (Seção 3.3.)

```

1  %%Luiz Rafael dos Santos - IMECC/Unicamp
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %           P-Fuzzy 2D com Condição Ambiental                               %
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5  function [X,Y,dados]=pfuzzy2D_amb(x,y,a1,taul)
6  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7  %           Dados Iniciais                                                  %
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  k=0;
10 K=800; %
11 if nargin==4
12     X(1)=x; %Populacao Inicial;
13     Y(1)=y; %Populacao Inicial;
14     a=num2str(a1); %Dados Controlador
15     tau = taul; %epoca de inicio do teste
16 elseif nargin==3
17     X(1)=x; %Populacao Inicial;
18     Y(1)=y; %Populacao Inicial;
19     a=num2str(a1); %Dados Controlador
20     tau = 1; %epoca de inicio do teste
21 elseif nargin==2
22     X(1)=x; %Populacao Inicial;
23     Y(1)=y; %Populacao Inicial;
24     a='kolpp_2_kappa'; %Dados Controlador
25     tau = 1; %epoca de inicio do teste
26 else
27     X(1)=input('xo => '); %Populacao Inicial;
28     Y(1)=input('yo => '); %Populacao Inicial;
29     a='kolpp_2_kappa'; %Dados Controlador
30     tau = 1; %epoca de inicio do teste
31 end
32 h=1;
33 dados=readfis(a);
34 [RangeX, RangeY foo] = dados.input.range;
35 maxRangeX = max(dados.input(1).range);
36 maxRangeY = max(dados.input(2).range);
37 el = 1;
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39 %           Dinamica Populacional                                          %
40 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
41 for i=1:K;
42     %% Condição Ambiental

```

```

43     if tau == 1
44         el = 1 ;
45     elseif tau == 180
46         el = -1 ;
47     end
48     %%% dinamica populacional
49     Δ=evalfis([X(i) Y(i) tau],dados);
50     tau = tau + el;
51     X(i+1)=X(i)+h*Δ(1);
52     Y(i+1)=Y(i)+h*Δ(2);
53     k=k+1;
54     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
55     %                               Valores Fora do Dominio                               %
56     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
57     if X(i+1)>100 | X(i+1)< 0 | Y(i+1)< 0 | Y(i+1)>100
58         t=0:k;
59         figure(1)
60         plot(t,Y,'—k',t,X,'k');
61         axis([0 k 0 100]);
62         figure(2)
63         hold on
64         plot(X,Y);
65         error('Os valores estao fora do dominio!!!')
66     end
67 end
68 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
69 %                               Plotando                               %
70 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
71 t=0:k;
72 figure(1)
73 plot(t,Y,'k',t,X,'—k');
74 axis([0 k 0 max(maxRangeX,maxRangeY)]);
75 title(['Presa - Predador'],['Populacao x tempo']);
76 figure(2)
77 hold on
78 plot(X,Y,'—k');
79 axis([RangeX RangeY]);
80 ax=gca;
81 set(ax,'Xtick',[maxRangeX*0.25 maxRangeX*.50 maxRangeX*0.75],'Ytick', ...
82 [maxRangeY*0.25 maxRangeY*.50 maxRangeY*0.75],'XGrid','on','YGrid', ...
83 'on','Box','on');
84 title(['Presa - Predador'],['Plano de fase']);
85 xlabel('Dens. pop. presa','fontsize',14);ylabel('Dens. pop. predador', ...
86 'fontsize',14)
87 hold off

```

## A.3. Códigos-fonte para Sistema P-fuzzy Controlado

### A.3.1. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Unidimensionais Controlado (Seção 4.2.)

```

1  %%% Luiz Rafael dos Santos – IMECC/Unicamp
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %%                               Controle de Pulgoes – Caso 1 – Unidimensional    %
4  %%                               Crescimento Populacional Inibido P-fuzzy          %
5  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6  function [p cont] = ControleCaso1(x0,apl,K)
7  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8  %                               Dados do Controlador Fuzzy                        %
9  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10 dados_cont = readfis('caso4-1');
11 dados_var = readfis('logistico');
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 %                               Dados Iniciais                                  %
14 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
15 if nargin==3
16     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
17     aplic = apl;
18     n = K; % iteracoes
19 elseif nargin==2
20     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
21     aplic =apl; % Intervalo de Aplicacao(dias) = ');
22     n = 400; % iteracoes
23 elseif nargin==1
24     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
25     aplic =15; % Intervalo de Aplicacao(dias) = ');
26     n = 400; % iteracoes
27 else
28     p(1) = input('x0=>');%Populacao Inicial;
29     aplic =15; % Intervalo de Aplicacao(dias) = ');
30     n = 400; % iteracoes
31 end
32 p_noncont(1) = p(1);
33
34 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
35 %                               Controle Fuzzy                                  %
36 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
37 k = 1;
38 for i = 1:n
39     var(i) = evalfis(p(i),dados_var);
40     var_noncont(i) = evalfis(p_noncont(i),dados_var);

```



```

14     Y(1)=y;%y0
15     aplic = ap;%periodo aplicacao
16     w=we;%controle especifico
17 elseif nargin==4
18     X(1)=x;
19     Y(1)=y;
20     aplic = ap;
21     w=1;
22 elseif nargin==3
23     X(1)=x;
24     Y(1)=y;
25     aplic = ap;
26     a='kolpp_2';
27     w=1;
28 elseif nargin==2
29     X(1)=x;
30     Y(1)=y;
31     aplic = 15;
32     a='kolpp_2';
33     w=1;
34 else
35     X(1)=input('xo => ');
36     Y(1)=input('yo => ');
37     aplic=input('Aplicacoes => ');
38     a='kolpp_2';
39     w=1;
40 end
41 b='caso34';
42 h=1;
43 dados=readfis(a);
44 dados_cont=readfis(b);
45 [RangeX, RangeY] = dados.input.range;
46 maxRangeX = max(RangeX);
47 maxRangeY = max(RangeY);
48 kel = 1;
49 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
50 %                               Dinamica Populacional                               %
51 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
52 for i=1:n;
53     Δ=evalfis([X(i) Y(i)],dados);
54     j = (mod(i,aplic));
55     if j == 0
56         cont(kel) = evalfis([X(i) Y(i)],dados_cont);
57         X(i+1) = (X(i) + Δ(1))*(1-cont(kel));
58         Y(i+1) = (Y(i) + Δ(2))*(1-w*cont(kel)); %0 controle especifico
59         if Y(i+1)<0

```

```

60         Y(i+1)=0;
61     end
62     kel = kel+1;
63 else
64     X(i+1)=X(i)+Δ(1);
65     Y(i+1)=Y(i)+Δ(2);
66     if Y(i+1)<0
67         Y(i+1)=0;
68     end
69 end
70 k=k+1;
71 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
72 %                               Valores Fora do Dominio                               %
73 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
74     if X(i+1)>100 | X(i+1)< 0 | Y(i+1)< 0 | Y(i+1)>100
75         t=0:k;
76         figure(1)
77         plot(t,Y,'—k',t,X,'k');
78         title(['Presa - Predador'],['Populacao x tempo'])
79         axis([0 k 0 100])
80         figure(2)
81         hold on
82         axis([0 100 0 100])
83         ax=gca;
84         set(ax,'Xtick',[26.9231 50 73.0769],'Ytick', ...
85 [26.9231 50 73.0769],'XGrid','on','YGrid', ...
86 'on','Box','on')
87         plot(X,Y,'k');
88         title(['Presa - Predador'],['Plano de fase'],...
89 ['Base de regra ==>',num2str(a)]);
90         error('Os valores estao fora do dominio!!!')
91     end
92 end
93 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
94 %                               Plotando                               %
95 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
96 t=0:k;
97 figure(2)
98 plot(t,Y,'—k',t,X,'k');
99 axis([0 k 0 max(maxRangeX,maxRangeY)]);
100 title(['Presa - Predador'],['Populacao x tempo'])
101 figure(1)
102 plot(X,Y,'k')
103 axis([RangeX RangeY]);
104 ax=gca;
105 set(ax,'Xtick',[maxRangeX*0.25 maxRangeX*.50 ...

```

```

106     maxRangeX*0.75], 'Ytick', [maxRangeY*0.25 maxRangeY*.50 ...
107     maxRangeY*0.75], 'XGrid', 'on', 'YGrid', 'on', 'Box', 'on');
108     title(['Presa - Predador'], ['Plano de fase']);
109     xlabel('Dens. pop. presa', 'fontsize', 14); ...
110     ylabel('Dens. pop. predador', 'fontsize', 14)

```

### A.3.3. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Unidimensionais Controlado com Condição Ambiental (Seção 4.2.)

```

1  %% Luiz Rafael dos Santos - IMECC/Unicamp
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %%                                Crescimento Populacional com Condição Ambiental                                %
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5  function [p cont p_noncont] = ControleAmbiental(x0,k0,apl,K)
6  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7  %                                Dados do Controlador Fuzzy                                %
8  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9  dados_cont = readfis('caso4-4');
10 dados_var = readfis('ambiental');
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 %                                Dados Iniciais                                %
13 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14 if nargin==4
15     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
16     tau = k0; %epoca de inicio do teste
17     aplic = apl;
18     n = K; % iteracoes
19 elseif nargin==3
20     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
21     tau = k0; %epoca de inicio do teste
22     aplic =apl; % Intervalo de Aplicacao(dias) = ');
23     n = 300; % iteracoes
24 elseif nargin==2
25     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
26     tau = k0; %epoca de inicio do teste
27     aplic =5; % Intervalo de Aplicacao(dias) = ');
28     n = 300; % iteracoes
29 elseif nargin==1
30     p(1) = x0;%Populacao Inicial;
31     tau = 0; %epoca de inicio do teste
32     aplic =5; % Intervalo de Aplicacao(dias) = ');
33     n = 300; % iteracoes]
34 else
35     p(1) = input('x0=>');%Populacao Inicial;

```



[illegible]

```

82 figure(1)
83 plot(t,p_noncont,':k',t,p,'k')
84 xlabel('Iteracao (k)');
85 ylabel('Populacao (x)');
86 RangeY = dados_var.input(1).range;
87 axis([0 n RangeY])
88 figure(2)
89 plot(cont,'k')
90 RangeContY = dados_cont.output(1).range;
91 RangeContX = [1 (length(cont)+2)];
92 axis([RangeContX RangeContY])
93 xlabel('Iteracao (j)');
94 ylabel('Controle (C)');

```

#### A.3.4. Código-fonte do script em Matlab para solução Sistemas P-fuzzy Bidimensionais Controlado com Condição Ambiental (Seção 4.3.)

```

1  %% Luiz Rafael dos Santos – IMECC/Unicamp
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %           Crescimento Populacional P-fuzzy 2D                               %
4  %           Condição Ambiental Controlada                                     %
5  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6  function [X,Y,cont]=pfuzzy2Dcont(x,y,ap,tau,a,we)
7  k=0;
8  n=800;
9  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
10 %           Dados Iniciais                                                    %
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 if nargin==6
13     X(1)=x;%x0
14     Y(1)=y;%y0
15     aplic = ap;%periodo aplicacao
16     w=we; %controle especifico
17 elseif nargin==5
18     X(1)=x;
19     Y(1)=y;
20     aplic = ap;
21     w=1;
22 elseif nargin==4
23     X(1)=x;
24     Y(1)=y;
25     aplic = ap;
26     a='kolpp_2';
27     w=1;

```

```

28 elseif nargin==3
29     X(1)=x;
30     Y(1)=y;
31     aplic = ap;
32     tau=0;
33     a='kolpp_1_kappa';
34     w=1;
35 elseif nargin==2
36     X(1)=x;
37     Y(1)=y;
38     tau=0;
39     aplic = 15;
40     a='kolpp_2_kappa';
41     w=1;
42 else
43     X(1)=input('xo => ');
44     Y(1)=input('yo => ');
45     aplic=input('Aplicacoes => ');
46     tau =0;
47     a='kolpp_1_kappa';
48     w=1;
49 end
50 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
51 %                               Dinamica Populacional                               %
52 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
53 b='caso34'; %controle
54 h=1;
55 dados=readfis(a);
56 dados_cont=readfis(b);
57 [RangeX, RangeY foo] = dados.input.range;
58 maxRangeX = max(RangeX);
59 maxRangeY = max(RangeY);
60 kel = 1;
61 el = 1;
62 for i=1:n;
63     if tau == 1
64         el = 1 ;
65     elseif tau == 180
66         el = -1 ;
67     end
68     Δ=evalfis([X(i) Y(i) tau],dados);
69     tau = tau + el;
70     j = (mod(i,aplic));
71     if j == 0
72         cont(kel) = evalfis([X(i) Y(i)],dados_cont);
73         X(i+1) = (X(i) + Δ(1))*(1-cont(kel));

```

```

74     Y(i+1) = (Y(i) + Δ(2))*(1-w*cont(kel)); %controle especifico
75     if Y(i+1)<0
76         Y(i+1)=0;
77     end
78     kel = kel+1;
79     else
80         X(i+1)=X(i)+Δ(1);
81         Y(i+1)=Y(i)+Δ(2);
82         if Y(i+1)<0
83             Y(i+1)=0;
84         end
85     end
86     k=k+1;
87     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
88     %                               Valores Fora do Dominio                               %
89     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
90     if X(i+1)>100 | X(i+1)< 0 | Y(i+1)< 0 | Y(i+1)>100
91         t=0:k;
92         figure(1)
93         plot(t,Y,'—k',t,X,'k');
94         title(['Presa — Predador'],['Populacao x tempo'])
95         axis([0 k 0 100])
96         figure(2)
97         hold on
98         axis([0 100 0 100])
99         ax=gca;
100        set(ax,'Xtick',[26.9231 50 73.0769],'Ytick', ...
101        [26.9231 50 73.0769],'XGrid','on','YGrid', ...
102        'on','Box','on')
103        plot(X,Y,'k');
104        title(['Presa — Predador'],['Plano de fase'],...
105        ['Base de regra ==>',num2str(a)]);
106        error('Os valores estao fora do dominio!!!')
107    end
108 end
109 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
110 %                               Plotando                               %
111 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
112 t=0:k;
113 figure(2)
114 plot(t,Y,'—k',t,X,'k');
115 hold on
116 axis([0 k 0 max(maxRangeX,maxRangeY)]);
117 title(['Presa — Predador'],['Populacao x tempo'])
118 figure(1)
119 plot(X,Y,'k')

```

```
120 hold on
121 axis([RangeX RangeY]);
122 ax=gca;
123 set(ax,'Xtick',[maxRangeX*0.25 maxRangeX*.50 ...
124 maxRangeX*0.75],'Ytick',[maxRangeY*0.25 maxRangeY*.50 ...
125 maxRangeY*0.75],'XGrid','on','YGrid','on','Box','on');
126 title(['Presa – Predador'],['Plano de fase']);
127 xlabel('Dens. pop. presa','fontsize',14);ylabel('Dens. pop. ...
128 predador','fontsize',14)
129 hold off
```

## Apêndice B.

# Bases de Regras para Sistema P-fuzzy Bidimensional com Condição Ambiental

Na Seção 3.3 observamos que, por conta da quantidade de regras que estávamos tratando, não as transcreveríamos toda a base de regras naquele momento para não dificultar a compreensão do texto.

Segue nas seções abaixo estas bases. Ressaltamos que elas foram construídas modificando-se os Quadros 5 e 6, inserindo-se a *Condição Ambiental*  $\kappa$ , conforme foi dito no Capítulo 3.

### B.1. Base de Regras com Condição Ambiental a partir Quadro 5

Tabela B.1.: Regras da Base de Regras para Sistema P-fuzzy presa-predador alterado a partir do Quadro 5 com condição ambiental.

$R_1$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_2$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_3$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_4$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_5$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_6$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_7$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_8$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_9$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{10}$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{11}$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{12}$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $AN$

continua na próxima página

$R_{13}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{14}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{15}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{16}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{17}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{18}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{19}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{20}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{21}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{22}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{23}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{24}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{25}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $AP$
$R_{26}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{27}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{28}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{29}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{30}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{31}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{32}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{33}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{34}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{35}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{36}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{37}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $AP$
$R_{38}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $AP$
$R_{39}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{40}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $AP$

continua na próxima página

$R_{41}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{42}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{43}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{44}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{45}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{46}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{47}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{48}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BN$

## B.2. Base de Regras com Condição Ambiental a partir do Quadro 6

Tabela B.2.: Regras da Base de Regras para Sistema P-fuzzy presa-predador alterado a partir do Quadro 6 com condição ambiental.

$R_1$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_2$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_3$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_4$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_5$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_6$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_7$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_8$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_9$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{10}$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{11}$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{12}$ :	Se $x$ é $B$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{13}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $AP$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{14}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $AP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{15}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{16}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $AP$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{17}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBN$

continua na próxima página



$R_{18}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{19}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{20}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{21}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{22}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MBN$
$R_{23}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAN$
$R_{24}$ :	Se $x$ é $MB$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $AN$
$R_{25}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $AP$ e $\Delta_y$ é $AP$
$R_{26}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{27}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{28}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MAP$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{29}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBP$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{30}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{31}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{32}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{33}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{34}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{35}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $BP$
$R_{36}$ :	Se $x$ é $MA$ e $y$ é $A$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BN$
$R_{37}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BP$ e $\Delta_y$ é $AP$
$R_{38}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{39}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $B$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{40}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $BN$ e $\Delta_y$ é $AP$
$R_{41}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{42}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MB$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{43}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $F$ então $\Delta_x$ é $MBN$ e $\Delta_y$ é $MAP$
$R_{44}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $PF$ então $\Delta_x$ é $MAN$ e $\Delta_y$ é $MBP$
$R_{45}$ :	Se $x$ é $A$ e $y$ é $MA$ e $\kappa$ é $DF$ então $\Delta_x$ é $AN$ e $\Delta_y$ é $BP$

continua na próxima página

$R_{46}$  : Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  e  $\kappa$  é  $F$  então  $\Delta_x$  é  $MBN$  e  $\Delta_y$  é  $MAP$

$R_{47}$  : Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  e  $\kappa$  é  $PF$  então  $\Delta_x$  é  $AN$  e  $\Delta_y$  é  $MBP$

$R_{48}$  : Se  $x$  é  $A$  e  $y$  é  $A$  e  $\kappa$  é  $DF$  então  $\Delta_x$  é  $AN$  e  $\Delta_y$  é  $BP$